SÉRIE VIII. — TOME V. N° 8. AOUT 1944.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

PARAMAGNÉTISME DES ÉLÉMENTS FERROMAGNÉTIQUES (¹)

Par MAURICE FALLOT.

Sommaire. — L'auteur étudie la susceptibilité paramagnétique du nickel, du fer et du cobalt jusqu'à 1500°C. Il met en évidence des écarts systématiques à la loi de Curie-Weiss pour le nickel et pour le fer γ. Un paramagnétisme constant sous-jacent, d'origine inconnue, apparaît dans le nickel. Dans le cas des variations de susceptibilité suivant la loi de Weiss, les constantes de Curie sont données avec une précision de 6 pour 1000. Des alliages de fer-nickel et de fer-aluminium sont également étudiés, et la susceptibilité du quartz est donnée.

I. **Introduction.** — La susceptibilité paramagnétique du fer, du nickel et du cobalt au-dessus de leurs points de Curie respectifs a été étudiée à plusieurs reprises en fonction de la température. Langevin a donné une interprétation théorique de la loi trouvée expérimentalement par Curie, d'après laquelle l'inverse de la susceptibilité varie linéairement en fonction de la température. P. Weiss l'a complétée, dans le cas des substances à champ moléculaire, en la mettant sous la forme

$$\chi = \frac{C}{T-\theta},$$

où C est la constante de Curie, T la température absolue et θ la température de Curie, liée à la constante N du champ moléculaire par la relation

$$\theta = NC.$$

Cette loi s'est trouvée vérifiée dans de nombreux cas, et pour des substances variées. Toutefois, il faut remarquer que, par une étude approfondie de la région immédiatement au-dessus de la température de Curie, Néel [1] a mis en évidence l'importance des fluctuations du champ moléculaire, et montré que la vérification de la loi de Curie-Weiss ne peut être tentée qu'à partir d'une température dépassant θ d'une centaine de degrés.

Le fer, dont le point de Curie est à 770°C, subit un changement de réseau (transformation $\alpha \rightarrow \gamma$) vers 900°C; toute étude directe du fer α est donc impossible; quant au fer γ, il peut être étudié entre 900 et 1400°C, c'est-à-dire dans un domaine de températures assez difficile à explorer.

Le cobalt a un point de Curie voisin de 1100°C, son étude nécessite également des mesures à hautes températures.

Le nickel, dont le point de Curie est à 358°C, se prête bien aux mesures paramagnétiques, aussi fut-il très étudié, soit comme élément pur, soit dans ses alliages, particulièrement aux températures inférieures à 1100°C. Or, si toutes les expériences confirment une variation linéaire de $\frac{1}{\chi}$ en fonction de la température entre 450 et 850°C environ, les valeurs expérimentales sont systématiquement inférieures à ce qu'on pourrait attendre au delà de 850°, c'est-à-dire que la droite déterminée dans l'intervalle 450-850 ne se prolonge pas vers les hautes températures. On interpréta généralement ce fait comme étant l'annonce d'une seconde droite, caractéristique d'un état allotropique supposé du nickel, se distinguant du premier par une constante de Curie plus grande et un point de Curie plus

(¹) La plupart des mesures données ici ont été effectuées en 1939 au Laboratoire de P. Weiss à Strasbourg. Quelques-unes seulement ont été reprises au Laboratoire d'Essais du Conservatoire des Arts et Métiers, avec une installation modifiée. Diverses circonstances avaient retardé leur publication jusqu'à présent. L'essentiel des résultats numériques a été déposé le 11 mai 1940 aux Archives originales du Service de Documentation du Centre national de la Recherche scientifique.

faible, le point de transition étant situé vers 850°C.

Le Tableau I ci-dessous présente les résultats anciens : les premières expériences de Weiss et Foëx [2] en 1911 portaient sur du nickel pur; elles furent reprises par Bloch [3] en 1912 à propos de l'étude des nickel-cobalt, par Renker [4] en 1913 comme complément à l'étude des ferronickels, par Alder [5] en 1916 lors de ses recherches sur les nickel-cuivre, par Safranek [6] en 1924 dans son étude des nickel-chrome. Seuls Bloch et Renker, après Weiss et Foëx, ont dépassé 850° et ont indiqué l'existence de *deux* constantes de Curie. Plus tard, lors de son étude détaillée des ferronickels en 1925, Peschard [7] émit l'hypothèse d'une courbure de la ligne représentative de $\frac{1}{\chi}$ en fonction de T vers les températures élevées, toutefois, il ne dépassa pas 1100°C. Terry [8], dont les expériences datent de 1917, fut le premier à explorer des températures plus élevées, et il conclut à une représentation différente de la loi de Weiss, malheureusement, ses températures ne semblent pas correctement déterminées, car dans la région basse, il est en désaccord avec les autres expérimentateurs, cette constatation enlevait beaucoup d'autorité à ses conclusions.

TABLEAU I. — *Constantes de Curie spécifiques du nickel* (expériences anciennes).

Dates.	Auteurs.	Température limite (°C).	Nickel β_1.	Nickel β_2.
1911	Weiss et Foëx	1050	0,00555	0,00687-(0,0069*)
1912	Bloch	> 880	0,00551	0,00687
1913	Renker	> 880	0,00558-(560*)	0,00687-(692*)
1913	Honda et Takagi	1060	-	0,00703
1916	Alder	-	0,00550	-
1917	Terry	1450	0,00500	Courbure
1924	Safranek	-	0,00555	-
1925	Peschard	1100	0,00550	0,00680**
1938	Sucksmith et Pearce	1200	0,00548	0,00685

(*) Valeur obtenue par extrapolation des ferronickels.
(**) Valeur donnée sous réserve.

De ce rapide examen de la question, il apparaît que des expériences nouvelles s'imposaient, principalement aux hautes températures. Alors que nous entreprenions de réaliser le dispositif nécessaire à Strasbourg [9], Sucksmith et Pearce [10] de leur côté abordaient ce problème. Leur technique est originale et leurs mesures paraissent excellentes; malheureusement, bien que leur four permette d'atteindre 1500°C, et que les expériences aient été conduites jusqu'à cette température pour le fer et jusqu'à 1440°C pour le cobalt, elles s'arrêtent à 1201°C pour le nickel, ce qui conduit ces auteurs à admettre l'existence d'une « droite coudée » comme représentant la variation de $\frac{1}{\chi}$ en fonction de la température.

D'autre part, les travaux théoriques se sont poursuivis par la mise en œuvre des théories quantiques, et à la suite des travaux de Stoner [11] traitant du paramagnétisme d'un gaz électronique réparti dans les bandes d'énergie atomiques, et de Néel [12] examinant le problème dans l'hypothèse d'un équilibre variable entre deux sortes d'ions, la loi linéaire semble n'être valable que d'une façon approchée, et dans un intervalle de températures restreint. Ces théories conduisent en effet à représenter $\frac{1}{\chi}$ en fonction de la température par une courbe tournant sa concavité vers les valeurs croissantes de $\frac{1}{\chi}$, et admettant une asymptote.

II. **Dispositif expérimental.** — Nous avons utilisé la méthode classique de Faraday, sous la forme que lui ont donnée Foëx et Forrer [13], le pendule de translation se prêtant à des mesures précises de la force d'attraction dans un champ non uniforme. Le four et le support de la substance ont été adaptés au but poursuivi.

La résistance chauffante du four est constituée par un fil de platine de 0,5 mm de diamètre, enroulé sur un tube lisse en alumine pure Degussa de 18 mm de diamètre et 100 mm de long. Entre les spires, on a disposé de l'alumine fondue et finement broyée (type de l'alumine pour coulage en barbotine) qui, dès le premier chauffage du four à 1500°C, est

agglomérée et forme un ciment isolant qui maintient en place les spires. Tout emploi de silicate est nuisible, et met rapidement le four hors d'usage, soit par attaque du platine, soit par formation d'eutectiques avec l'alumine. Le tube d'alumine est fermé à sa partie supérieure, et le fil est bobiné de façon à ne pas créer de champ axial lorsqu'on alimente le four en courant continu. Le tube chauffant est entouré de deux cylindres coaxiaux en nicral D d'Imphy, qui forment écrans contre le rayonnement, enfin, une chemise à circulation d'eau, en laiton, assure le refroidissement extérieur du four. L'ensemble ne mesure que 35 mm de diamètre et 180 mm de long. Les amenées de courant se trouvent à la partie supérieure du four, calorifugée par un disque épais en stéatite; il faut avoir soin de laisser à celui-ci le jeu nécessaire à la dilatation du tube d'alumine; sans cette précaution, le tube ramolli se déforme et est rapidement brisé. Ce four, grâce à son inertie très faible, a l'avantage de se mettre très vite en équilibre de température pourvu que la tension d'alimentation et le débit d'eau soient constants : en 2 h, on peut atteindre 1500°C par paliers successifs, et se maintenir à toute température intermédiaire désirée pendant 10 min au moins, temps largement suffisant pour atteindre l'équilibre de température, et effectuer les mesures. Sa construction soignée a permis de l'utiliser déjà plusieurs centaines d'heures.

La substance à étudier doit être protégée contre l'oxydation. Dans ce but, Sucksmith et Pearce ont placé l'ensemble de leur appareil sous le vide, il est alors difficile d'éviter l'évaporation des métaux aux températures élevées, ceci est particulièrement à craindre dans le cas d'alliages, où l'un des constituants peut distiller, si bien que, non seulement la masse, mais encore la composition de l'échantillon varient. Pour éviter cette cause d'erreur, les auteurs cités ont introduit de l'argon dans leur enceinte. Nous avons utilisé plus simplement des échantillons en forme de petits cylindres de 3 mm de diamètre et 12 mm de long, enfermés dans des ampoules en quartz transparent, scellées sous vide. Dans le cas du nickel, il n'y a pas d'attaque sensible par le quartz, la transformation de la silice en cristoballite par chauffage nécessite seulement l'emploi d'une ampoule neuve à chaque expérience; dans le cas du fer et de ses alliages, l'attaque par la silice est assez rapide pour qu'il soit nécessaire d'interposer quelques grains d'alumine pure, empêchant le contact direct du métal avec le quartz de l'ampoule. On vérifia sur quelques échantillons qu'il n'y avait ainsi ni oxydation, ni perte de masse au cours du chauffage.

Dans le premier dispositif réalisé, l'ampoule de quartz contenant l'échantillon était placée dans un cylindre en platine manchonné au sommet d'une tige en alumine de 2 mm de diamètre et 100 mm de long portée par le bras de la balance de translation. Pour éviter le contact silice-platine, on interposait un petit creuset cylindrique en alumine pure Degussa; ce dernier avait 9 mm de diamètre et 20 mm de long, et ne pesait que 1,5 g. Cet ensemble était toutefois assez lourd, et un étalonnage préalable était chaque fois nécessaire pour déterminer, aux diverses températures, la correction due au paramagnétisme du platine et au diamagnétisme du quartz et de l'alumine. Nous avons pu simplifier ce dispositif en confectionnant, grâce aux renseignements obligeamment donnés par M. V. Stott du N. P. L., un support complet en alumine pure, représenté figure 1. A est

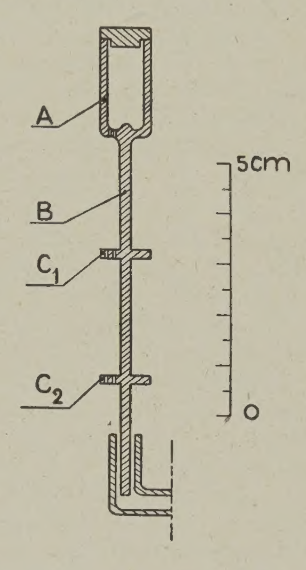


Fig. 1. — Support en alumine pour les échantillons.

un creuset de 10 mm de diamètre et 20 mm de haut, prolongé par une tige B de 2 mm de diamètre et 100 mm de long, ces deux pièces, recuites ensemble à 1700°C forment un ensemble rigide. Alors que le couple était précédemment soudé à la paroi du cylindre de platine, il pénètre ici à l'intérieur même du support en alumine grâce à deux trous de 0,8 mm ménagés à cet effet au fond du creuset. Sur la tige B, sont également fixés deux disques C_1 et C_2 en réfractaire, empêchant le rayonnement vers l'ouverture inférieure du four; ils maintiennent aussi en place les fils du couple. L'extrémité inférieure de la tige B est froide, et est mastiquée dans le tube de verre D du bras de la balance de translation.

En position de travail, le disque C_1 se place juste à l'orifice inférieur du four, tandis que le bas de la tête A est au milieu du four, dont la partie supérieure est, nous l'avons vu, fortement calorifugée. La distance entre la pièce A et la paroi du four est de 3 mm seulement; on peut considérer que l'intérieur de A réalise suffisamment les conditions d'un corps noir, et que la température indiquée par le couple est celle de l'échantillon.

Les fils du couple ont un assez fort diamètre (0,7 mm); pour éviter une détérioration trop rapide, ils se prolongent par des fils de 0,2 mm dont l'extrémité froide est maintenue dans la glace fondante. Ce couple, livré par Heraeus, a été préalablement étalonné au point de fusion de l'or par la méthode du fil; après avoir été porté un total de 5 h à 1500°C, il a été changé, son étalonnage ayant varié de 50 µV à 1000°C. On peut d'ailleurs contrôler souvent l'étalonnage *in situ*, ainsi que l'a fait remarquer Weil [14], en utilisant la discontinuité de diamagnétisme de l'or à son point de fusion. Les f. é. m. ont été mesurées au moyen d'un potentiomètre préalablement étalonné, qui permettait de compter sur une précision de $\pm$ 5 µV. L'installation ultérieure d'un potentiomètre SKM, acquis grâce à une subvention du Centre national de la Recherche scientifique en 1939, permet d'obtenir des mesures reproductibles à 1 µV près.

III. **Étalonnage de l'appareil.** — Dans cette méthode, la force d'attraction magnétique est équilibrée par un dispositif électromagnétique à champ fixe et à courant ajustable; l'intensité du courant continu est mesurée par la différence de potentiel aux bornes d'une résistance fixe et étalonnée. On ramène donc la mesure d'une susceptibilité magnétique à celle d'une différence de potentiel, lue au potentiomètre. Les mesures sont relatives, et il y a lieu de déterminer la constante de l'appareil. On a employé, comme substance de comparaison, du pyrophosphate de manganèse ([1]), dont la susceptibilité, étudiée par M. Foëx, est, pour 1 g,

$$\chi_0 = 97,58.10^{-6} \text{ C.G.S.} \quad \text{à } 290^\circ\text{K},$$

avec un point de Curie situé à — 4°K.

On a enfermé 249,80 mg de pyrophosphate dans une ampoule de quartz de mêmes dimensions que celles qui servirent par la suite, dont la masse était 571,25 mg. On a trouvé qu'à 292,1°K, il fallait 2616,5 µV pour compenser l'attraction due à la susceptibilité de l'ensemble : pyrophosphate, quartz et support, alors que pour ces deux derniers seuls, il fallait 358,5 µV. On en a déduit que 1000 µV correspondaient à une susceptibilité de $10,72.10^{-6}$ C.G.S.

On a déterminé à différentes températures les corrections dues aux supports. Elles sont connues à 1 pour 100 près, et, dans les cas les plus défavorables, elles sont de l'ordre du cinquième de la susceptibilité de la substance étudiée. On peut donc estimer que les susceptibilités sont données ci-dessous avec une précision de l'ordre de 6 pour 1000.

([1]) Le sulfate de gadolinium, ainsi que l'alun de titane et de cæsium sont des étalons recommandés, car ils suivent la loi de Curie jusqu'à des températures respectives de l'ordre de 0,1 et 0,01° K.

Accessoirement, et à titre de contrôle, nous avons mesuré la susceptibilité du quartz transparent fondu à diverses températures comprises entre 292 et 1512°K; nous avons trouvé en moyenne $-0,46.10^{-6}$ par gramme, soit $-27,6.10^{-6}$ pour la molécule.

IV. **Étude du nickel pur.** — L'étude a porté sur un nickel pur fourni par Heraeus, une autre partie de la livraison a servi aux mesures de chaleur spécifique par Néel [15]; il titre 99,91 pour 100.

Plusieurs séries d'expériences ont porté sur différentes masses de nickel, en opérant soit à températures croissantes jusqu'à 1540°C, soit à températures décroissantes, soit encore en passant rapidement d'une température élevée à une plus basse de façon à mettre en évidence, si possible, un état de haute température qui se conserverait par trempe rapide. Ce ne fut d'ailleurs pas le cas, tous les points obtenus se placent rigoureusement sur une courbe unique et continue. Les Tableaux II, III et IV ci-dessous donnent les résultats numériques pour trois séries d'expériences faites respectivement sur 1228,0; 1217,4 et 338,2 mg de nickel; et la courbe de la figure 2 représente la variation de l'inverse de la susceptibilité en fonction de la température. Les valeurs ont été corrigées du diamagnétisme du nickel, mesuré par Mlle Serres, et égal à $-0,00307.10^{-6}$ par gramme. On observe, jusque vers 381°C, la région de Néel; entre 480 et 880°C les expériences actuelles confirment les résultats anciens, à savoir que l'inverse de la susceptibilité est convenablement représentée, en fonction de la température, par une droite, la constante de Curie correspondante est $C = 0,0058$ par gramme

$$C_{at} = 0,326.$$

Si l'on envisage un intervalle restreint de 200° environ au delà de 880°C, les résultats anciens sont encore confirmés (on pourrait calculer le coefficient angulaire d'une corde, qui donnerait une constante de Curie fictive égale à 0,00686), mais si l'on considère l'ensemble des points obtenus jusqu'au point de fusion (1452°C), la représentation de $\frac{1}{\chi}$ en fonction de la température est une courbe continue, et la droite signalée plus haut apparaît comme une tangente inflexionnelle. L'allure de cette courbe est inattendue, car elle ne satisfait pas plus à la loi de Curie-Weiss qu'aux prévisions des théories quantiques. Dans des cas analogues, Weiss a suggéré l'emploi de relations de la forme

$$(\chi - a)(T - \theta) = C,$$

c'est-à-dire que l'on suppose qu'un paramagnétisme constant a est superposé au paramagnétisme variable. En particulier, Gustafsson [16] en 1937 a été amené à attribuer au nickel un coefficient a compris entre 170 et 250.10^{-6}; Terry adopta 150.10^{-6}; dans les expériences de Manders [17] qui ont porté sur de nombreux

Tableau II. — Ni *Heraeus.*
Susceptibilité spécifique.

T (°C).	T (°K).	$\chi.10^6$.	$\frac{1}{\chi}.10^{-4}$.
461,5	734,6	66,97	1,493
456,2	729,3	71,27	1,403
458,7	731,8	70,10	1,426
459,8	732,9	69,17	1,446
460,6	773,7	67,73	1,476
461,9	735,0	66,61	1,501
462,7	735,8	66,10	1,513
463,0	736,1	65,90	1,517
461,1	734,2	67,45	1,482
479,9	753,0	56,44	1,772
567,0	840,1	29,29	3,414
565,6	838,7	29,89	3,346
566,8	839,9	29,73	3,364
665,1	938,2	19,59	5,105
749,8	1022,9	15,16	6,596
803,1	1076,2	13,35	7,491
838,1	1111,2	12,36	8,091
892,6	1165,7	11,06	9,042
978,7	1251,8	9,70	10,309
1040,5	1313,6	8,91	11,220
1115,7	1388,8	8,24	12,137
1209,1	1482,2	7,47	13,394
1260,3	1533,3	7,18	13,929
1261,7	1534,8	7,23	13,837
1324,5	1597,6	6,87	14,564
1424,4	1697,5	6,34	15,768
1470,9	1744,0	6,18	16,173
1409,7	1682,8	6,46	15,489

Tableau III. — Ni *Heraeus.*
Susceptibilité spécifique.

T (°C).	T (°K).	$\chi.10^6$.	$\frac{1}{\chi}.10^{-4}$.
429,8	702,9	100,88	0,991
745,2	1019,3	15,33	6,523
807,1	1080,2	13,15	7,605
806,0	1079,1	13,18	7,582
978,3	1251,4	9,75	10,256
1317,8	1590,9	6,97	14,351
1419,5	1692,6	6,38	15,684
1460,8	1733,9	6,18	16,189
1497,4	1770,5	6,13	16,305
1543,9	1817,0	6,03	16,592
1425,0	1698,1	6,36	15,721
1056,7	1324,8	8,75	11,427
1055,3	1328,4	8,82	11,335
738,9	1012,0	15,59	6,414

Tableau IV. — Ni *Heraeus.*
Susceptibilité spécifique.

T (°C).	T (°K).	$\chi.10^6$.	$\frac{1}{\chi}.10^{-4}$.
883,5	1156,6	11,16	8,958
992,8	1265,9	9,60	10,417
1239,9	1513,0	7,37	13,568

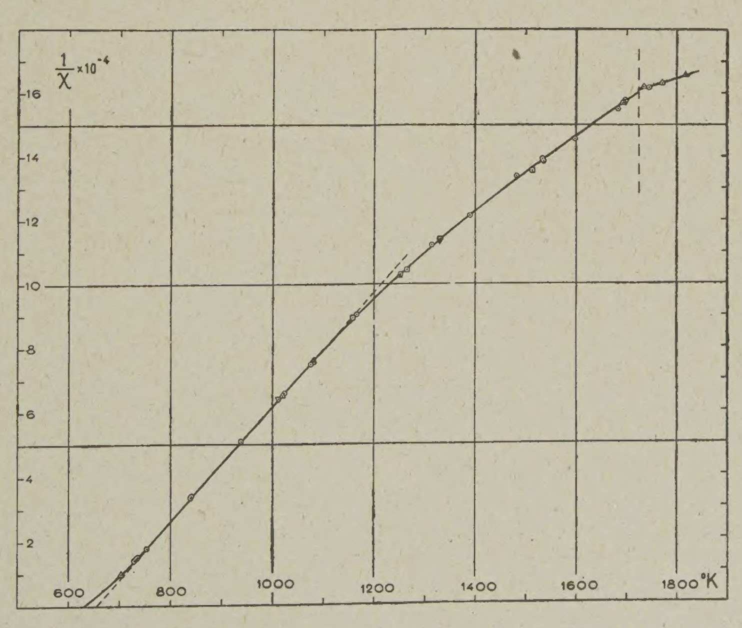


Fig. 2. — Susceptibilité spécifique du nickel, en fonction de la température.

alliages de nickel, la « rectification » des courbes s'opère pour des valeurs comprises entre $42,7$ et $84,1.10^{-6}$ par atome-gramme [18]. Nous avons tenté une rectification de ce genre en adoptant

$$a = 2,15.10^{-6} \text{ par gramme,}$$

soit 126.10^{-6} par atome-gramme. On obtient alors, non pas une droite, mais une courbe (*fig.* 3)

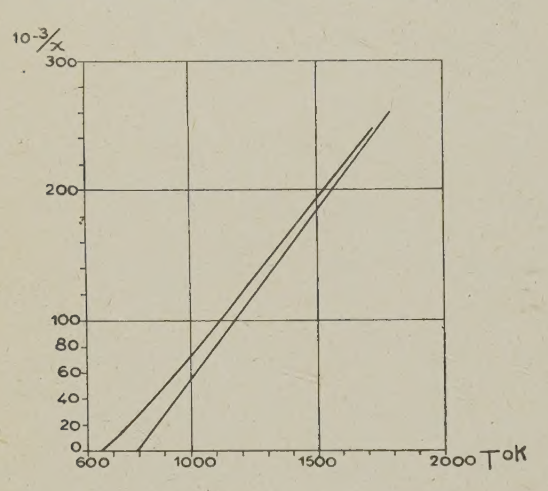


Fig. 3. — Susceptibilité spécifique du nickel, en fonction de la température, valeurs corrigées du paramagnétisme sous-jacent.

TABLEAU V.

Fe—Ni : 4,3 *pour* 100 *spéc.* Fe, 4,5 *pour* 100 *atom.*
$\theta_f = 410°C = 683°K$; $C = 0,00727$;
$\theta_p = 701°K$; $C_{at} = 0,426$.

T (°C).	T (°K).	$10^6\chi$.	$\frac{10^{-4}}{\chi}$.
481,4	754,5	121,64	0,822
539,7	812,8	64,52	1,550
542,2	815,3	63,67	1,570
544,2	817,3	62,11	1,610
545,2	818,3	61,78	1,619
545,6	818,7	61,03	1,638
645,7	918,8	33,25	3,007
646,5	919,6	33,11	3,020
726,5	999,6	24,34	4,108
823,6	1096,7	18,46	5,417
869,5	1142,6	16,64	6,010
911,8	1184,9	15,25	6,557
851,9	1125,0	17,28	5,787
802,6	1075,7	19,47	5,136
961,4	1234,5	13,91	7,189
1106,5	1379,6	11,22	8,913
1226,8	1499,9	9,72	10,288
1318,5	1591,6	8,95	11,173
764,6	1037,7	21,59	4,632

TABLEAU VI.

Fe—Ni : 7,7 *pour* 100 *spéc.* Fe, 8,5 *pour* 100 *atom.*
$\theta_f = 453°C = 726°K$; $C = 0,00885$;
$\theta_p = 745°K$; $C_{at} = 0,517$.

T (°C).	T (°K).	$10^6\chi$.	$\frac{10^{-4}}{\chi}$.
520,8	793,9	159,9	0,625
520,2	793,3	163,0	0,613
520,4	793,5	162,3	0,616
581,1	854,2	80,61	1,240
582,4	855,5	79,89	1,252
583,3	856,4	79,20	1,263
670,5	943,6	44,61	2,242
757,2	1030,3	31,06	3,219
758,6	1031,7	30,78	3,249
759,0	1032,1	30,77	3,250
759,5	1032,6	30,75	3,252
860,9	1134,0	22,67	4,411
954,8	1227,9	18,32	5,458
958,4	1231,5	18,25	5,479
959,3	1232,4	18,08	5,531
1091,4	1364,5	14,48	6,906
1092,7	1365,8	14,44	6,925
1215,0	1488,1	12,12	8,251
1288,6	1561,7	11,24	8,897
1328,7	1601,8	10,73	9,320
860,9	1134,0	22,73	4,399

TABLEAU VII.

Fe—Ni : 15,8 *pour* 100 *spéc.* Fe, 16,5 *pour* 100 *atom.*
$\theta_f = 538°C = 811°K$; $C = 0,01167$;
$\theta_p = 833,5°K$; $C_{at} = 0,679$.

T (°C).	T (°K).	$10^6\chi$.	$\frac{10^{-4}}{\chi}$.
599,6	872,7	240,5	0,416
670,1	943,2	104,4	0,958
669,2	942,3	105,2	0,950
755,5	1028,6	59,87	1,670
756,1	1029,2	59,78	1,673
855,3	1128,4	39,42	2,537
960,7	1233,8	29,10	3,436
1089,1	1362,2	22,21	4,502
1235,6	1508,7	17,38	5,754
1317,6	1590,7	15,64	6,394
1347,2	1620,3	15,07	6,636
1387,0	1660,1	14,46	6,916
768,4	1041,5	55,96	1,787
769,3	1042,4	55,80	1,792
1387,7	1660,8	14,46	6,916

TABLEAU VIII.

Fe—Ni : 19,8 *pour* 100 *spéc.* Fe, 20,6 *pour* 100 *atom.*

$\theta_f = 572^\circ C = 845^\circ K$; $C = 0,01296$;

$\theta_p = 862^\circ K$; $C_{at} = 0,753$.

T (°C).	T (°K).	$10^6 \chi$.	$\frac{10^{-4}}{\chi}$.
610,2	883,3	389,0	0,257
610,1	883,2	391,0	0,256
609,9	883,0	391,8	0,255
669,8	942,9	153,9	0,650
670,5	943,6	152,9	0,654
671,0	944,1	151,5	0,660
787,0	1060,1	65,87	1,518
786,5	1059,6	65,77	1,520
873,6	1146,7	46,17	2,166
971,1	1244,2	33,85	2,954
1078,5	1351,6	26,42	3,785
1216,4	1489,5	20,77	4,815
1345,0	1618,1	17,52	5,708
902,3	1175,4	41,34	2,419
710,6	933,7	105,5	0,948

admettant une asymptote de coefficient angulaire

$$C = \frac{K}{I_0 \mu} = \frac{8,313.10^7}{57,6 \times 5564} = 259,4.$$

Bien que celle-ci ait l'allure des courbes théoriques de Stoner et de Néel, il semble prématuré de tirer des développements de cet ordre, sans faire intervenir d'autres données; il reste d'ailleurs à comprendre l'origine, dans le nickel, de ce paramagnétisme constant, dont la valeur est aussi élevée.

Dans le but d'apporter une contribution expérimentale à cette question, nous avons étudié une série de ferronickels de titres croissants. Les Tableaux V à VIII et la figure 4 donnent les résultats de ces mesures. On constate d'une part que l'allure des courbes représentant $\frac{1}{\chi}$ en fonction de la température reste la même, toutefois, la courbure disparaît peu à peu, et, par suite, on peut les « rectifier » avec des valeurs de a proportionnelles à la teneur en nickel. Ce fait donne une grande vraisemblance à l'hypothèse du paramagnétisme constant superposé dans le nickel.

Si l'on calcule enfin les constantes de Curie à partir des tangentes inflexionnelles, on peut dresser le tableau ci-contre (IX), l'extrapolation vers le nickel pur donne, pour sa constante de Curie, 0,00552, en bon accord avec les valeurs trouvées directement plus haut

Si l'on cherche de la même façon à calculer la constante de Curie du nickel pur à partir des dilutions de cet élément dans ses alliages, on est conduit à rectifier les courbes de Manders [18] et à extrapoler les constantes de Curie que l'on en déduit en fonction des titres. Étant donnée l'incertitude de ces opérations, il n'est pas surprenant que l'on trouve

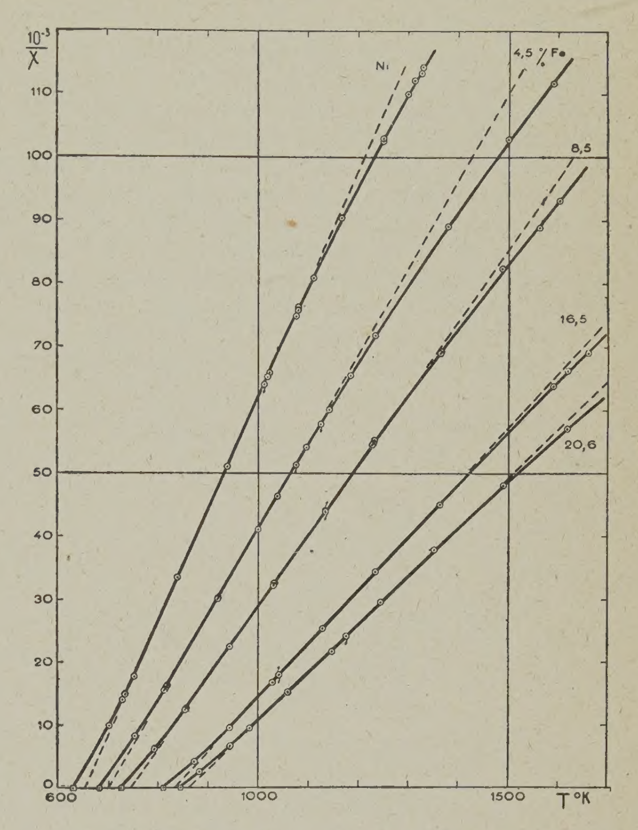


Fig. 4. — Susceptibilité spécifique d'alliages fer-nickel, en fonction de la température.

TABLEAU IX. — Fe—Ni.

C_{Ni} *extrapolé* = 0,00552, C_{at} *extrapolé* = 0,324;

C_{at} *augmente de* 2,27 *pour* 100 *atomes*

(C_{fer} *extrapolé* = 2,59).

Titre en fer		θ_p (°K).	C.	C_{at}.
spécifique.	atomique.			
0	0	654	0,00556	0,326₃
4,3	4,5	701	0,00727	0,426
7,7	8,5	745	0,00885	0,517
15,8	16,5	833	0,01167	0,679
19,8	20,6	862	0,01296	0,753

une valeur moyenne quelque peu différente (on trouve 0,00584), mais aucune valeur ne se rapproche de 0,00685, valeur donnée autrefois comme étant la constante d'un état de haute température du nickel.

On peut donc conclure que les propriétés magné-

tiques du nickel pur, comme ses autres propriétés physiques, ne présentent aucune anomalie vers 850°C.

V. **Étude du fer** α. — Ainsi que nous l'avons signalé, on ne peut étudier directement le paramagnétisme du fer α, qui n'existe que dans un domaine de températures restreint. Or il se trouve que parmi les nombreux éléments que l'on peut allier au fer, certains ont la propriété d'élever la température de transformation $\alpha \rightarrow \gamma$, tels sont le silicium, l'aluminium, le vanadium, l'étain, le chrome, le tungstène, l'arsenic, le phosphore, le titane, le molybdène, si bien que le paramagnétisme de ces alliages peut être étudié pour des titres variables, et extrapolé ensuite vers le titre nul. Néel a appliqué cette méthode [1] en utilisant le silicium et l'étain,

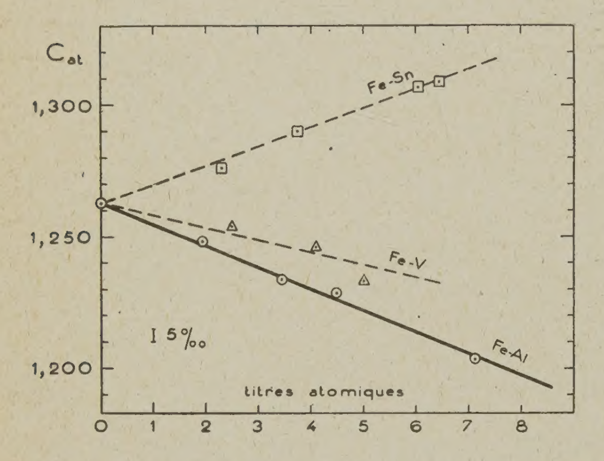


Fig. 5. — Constantes de Curie atomiques d'alliages de fer α.

dont les alliages ont été étudiés respectivement entre 4 et 18 pour 100 et entre 2 et 8 pour 100. Sucksmith [10] s'est adressé aux ferrovanadiums entre 2,5 et 5 pour 100. Nous avons choisi l'aluminium comme élément de dilution en raison de la grande pureté avec laquelle on peut se procurer cet élément et de l'étendue de concentration possible. Nous avons préparé des alliages de titres compris entre 2 et 7 pour 100 atomiques (1 et 3,5 pour 100 spécifiques) à partir de fer carbonyle fondu sous vide, et d'aluminium à 99,99; les fusions ont été faites au four à haute fréquence Ribaud sous faible pression d'hydrogène (1 mm de mercure) dans des creusets en alumine pur. Les Tableaux X à XIII donnent les valeurs de χ pour ces alliages en fonction de la température, les variations de $\frac{1}{\chi}$ sont alors linéaires dans l'intervalle de températures que l'on peut explorer. On en déduit les points de Curie et les constantes de Curie figurant au Tableau XIV. La figure 5 donne les constantes de Curie en fonction du titre, on y a placé les points obtenus dans les expériences de Néel et de Sucksmith; on voit que dans le cas des ferrovanadium, l'extrapolation n'est légitime qu'à partir des deux points de titres 2,5 et 4,1. Les trois séries d'expériences sont concordantes et donnent les valeurs

$$C = 0{,}0226,$$
$$C_{at} = 1{,}263 \pm 0{,}006,$$
$$\theta_p = 1093^\circ\mathrm{K}.$$

TABLEAU X. — *Susceptibilités par gramme des ferroaluminiums.*

Fe—Al, 1,94 *pour* 100 *atom.*

T (°K).	$10^6\chi$.	$\frac{10^{-3}}{\chi}$.
1163	277,1	3,61
1163	279,0	3,58
1281	118,1	8,47
1563	47,7	20,94
1561	48,1	20,81
1559	48,2	20,75
1558	48,3	20,69
1684	38,6	25,91
1683	38,8	25,76
1185	225,7	4,43
1185	227,0	4,40
1367	81,0	12,35

TABLEAU XI. — *Susceptibilités par gramme des ferroaluminiums.*

Fe—Al, 3,45 *pour* 100 *atom.*

T (°K).	$10^6\chi$.	$\frac{10^{-3}}{\chi}$.
1254	130,9	7,64
1255	130,3	7,68
1256	129,6	7,72
1376	76,4	13,08
1377	76,1	13,14
1485	55,3	18,07
1484	55,8	17,91
1598	43,8	22,81
1599	43,7	22,87
1251	132,1	7,57
1252	131,7	7,59
1252	131,5	7,60

TABLEAU XII. — *Susceptibilités par gramme des ferroaluminiums.*
Fe—Al, 4,5 *pour* 100 *atom.*

T (°K).	$10^6\chi$.	$\frac{10^{-3}}{\chi}$.
1150	256,0	3,91
1250	133,9	7,47
1251	133,0	7,52
1251	132,9	7,53
1252	132,7	7,53
1375	76,8	13,02
1483	56,1	17,82
1597	44,0	22,72
1598	43,9	22,78
1274	117,4	8,52

TABLEAU XIII. — *Susceptibilités par gramme des ferroaluminiums.*
Fe—Al, 7,11 *pour* 100 *atom.*

T (°K).	$10^6\chi$.	$\frac{10^{-3}}{\chi}$.
1269	114,1	8,76
1270	113,5	8,81
1377	73,6	13,58
1485	54,3	18,41
1604	42,3	23,65

TABLEAU XIV. — *Constantes et points de Curie des ferroaluminiums.*

Titre atomique.	θ_p (°K).	C.	C_{at}.
7,11	1073	0,02237	1,203 ±0,003
4,50	1081	0,02254	1,228 ±0,004
3,45	1082	0,02251	1,234 ±0,003
1,94	1089	0,02259	1,248 ±0,004
0	1093 (*)	$0,0226_1$ (*)	1,263 (*) ±0,006

(*) Valeurs extrapolées pour le fer pur α.

VI. **Étude du fer γ.** — Le fer existe dans le réseau du cube à faces centrées à partir de 900°C environ jusque vers 1400°C. Nous avons étudié la susceptibilité paramagnétique de cet élément sur un échantillon de fer pur que nous devons à l'obligeance de Yensen; il titre plus de 99,95 en fer, et contient moins de 0,01 pour 100 de silicium, moins de 0,005 pour 100 de carbone et moins de 0,003 pour 100 de phosphore.

Deux séries d'expériences ont été faites, à températures croissantes, décroissantes, avec passage rapide d'une température extrême à l'autre, comme pour le nickel, de façon à ne pas laisser inaperçue l'existence possible de plusieurs états magnétiques. Le Tableau XV est relatif à une série portant sur 777,3 mg de fer, et le Tableau XVI, à une série portant sur 1153,5 mg. Les températures sont indiquées dans l'ordre de leur obtention. Sur la figure 6, on a représenté les résultats de la première série par des points entourés d'un cercle, et ceux relatifs à la deuxième série, par des points entourés d'un

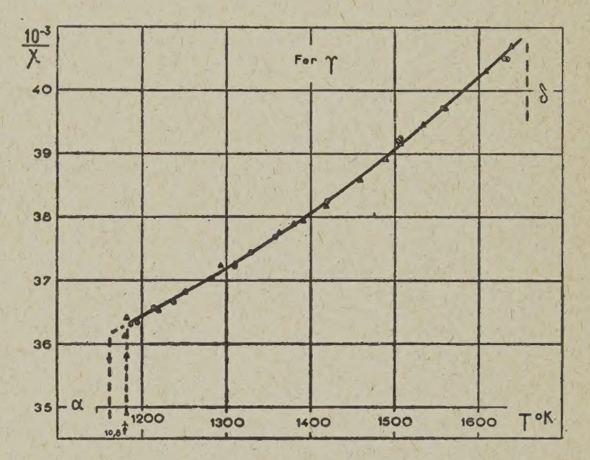


Fig. 6. — Susceptibilité spécifique du fer α en fonction de la température.

triangle. On constate que la variation de $\frac{1}{\chi}$ avec la température est, d'une manière très constante et réversible, représentée par une courbe à concavité tournée vers les grandes valeurs de $\frac{1}{\chi}$. De 1200°K à 1420°K, domaine de températures que les expériences anciennes avaient déjà exploré, la loi de Weiss paraît s'appliquer assez bien, et permet de calculer une constante de Curie

$$C_a = 6,726$$

et un point de Curie

$$\theta_p = -3180°\mathrm{K}.$$

En conclusion de leurs expériences, Sucksmith et Pearce donnent

$$C_a = 6,374; \qquad \theta_p = -2790°\mathrm{K}.$$

Les expériences de ces auteurs correspondent à une droite unique, s'écartant peu, mais régulièrement, de la courbe tracée figure 6, avec des écarts systématiques.

TABLEAU XV. — *Susceptibilité spécifique du* Fer *Yensen* (*état* γ).

T (°C).	T (°K).	$10^6\chi$.	$\frac{10^{-3}}{\chi}$.
913,4	1186,5	27,54	36,31
921,6	1194,7	27,51	36,34
941,0	1214,1	27,34	36,56
964,8	1237,9	27,28	36,66
1009,7	1282,8	27,00	37,03
1036,9	1310,0	26,87	37,22
1085,3	1358,4	26,53	37,69
1147,0	1420,1	26,14	38,25
1234,2	1507,3	25,48	39,25
1056,4	1329,5	26,71	37,44
1230,5	1503,6	25,51	29,20
1284,9	1558,0	25,17	39,73
1357,8	1630,9	24,68	40,52
1362,0	1635,1	24,69	40,50

TABLEAU XVI. — *Susceptibilité spécifique du* Fer *Yensen* (*état* γ).

T (°C).	T (°K).	$10^6\chi$.	$\frac{10^{-3}}{\chi}$.
892,1	1165,2	247,6	4,04 (état α)
901,4	1174,5	168,3	5,94 (»)
904,3	1177,4	92,54	10,81 (»)
908,3	1181,4	28,65	34,90 (»)
1366,1	1639,2	24,57	40,70 (état γ)
1336,5	1609,6	24,81	40,31 (»)
1288,0	1561,1	25,17	39,72 (»)
1234,6	1507,7	25,53	39,17 (»)
1186,6	1459,5	25,91	38,59 (»)
1145,4	1418,5	26,19	38,18 (»)
1089,6	1362,7	26,49	37,75 (»)
1037,2	1310,3	26,84	37,26 (»)
1107,3	1380,4	26,39	37,89 (»)
1119,1	1392,2	26,36	37,94 (»)
1020,7	1293,8	26,86	37,23 (»)
978,2	1251,3	27,16	36,82 (»)
947,3	1220,4	27,38	36,52 (»)
906,8	1179,9	27,68	36,13 (»)
1261,6	1534,7	25,34	39,46 (»)
1215 3	1488,4	25,70	38,91 (»)
908,7	1181,8	27,46	36,41 (»)

La loi de variation de $\frac{1}{\chi}$ en fonction de la température n'étant pas linéaire, il n'y a pas lieu de considérer la constante de Curie autrement qu'une première approximation. Étant donnée la difficulté de ces expériences à hautes températures, et les différences de pureté entre les fers étudiés, il n'est pas étonnant que les expériences anciennes aient semblé donner des variations linéaires.

Remarquons enfin que la transformation $\alpha \rightleftharpoons \gamma$ a lieu aux températures 888,6°C et 908,2°C, avec une zone étroite d'irréversibilité, et le passage à l'état δ a lieu à 1385,5°C.

VII. **Étude du cobalt.** — Nous avons obtenu les constantes magnétiques du cobalt pur par une méthode directe et par une méthode indirecte.

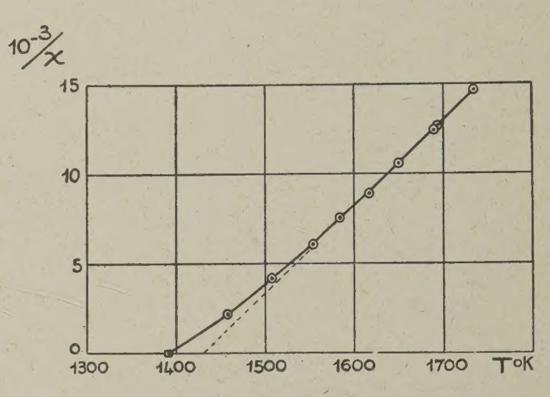


Fig. 7. — Susceptibilité spécifique du cobalt en fonction de la température.

Le cobalt utilisé était du cobalt électrolytique, que nous devons à l'obligeance de la Société du Haut-Katanga. Son titre, après refusion sous vide, était 99,87, et il contenait 0,099 pour 100 de nickel et 0,007 pour 100 de fer.

Nous avons étudié le cobalt pur à partir de son point de Curie ferromagnétique (trouvé à 1117°C ± 5°C), jusqu'à 1460°C. Le Tableau XVII donne les résultats de mesures, et la figure 7 représente la variation de $\frac{1}{\chi}$ en fonction de la température. On constate qu'après une région où la courbure de la ligne représentative peut être interprétée comme due aux fluctuations, on est en présence d'une variation suivant la loi de Curie-Weiss, dans un intervalle de 200° environ, qui permet de calculer une constante de Curie et un point de Curie. On obtient

$$C = 0{,}02085; \quad C_a = 1{,}230; \quad \theta = 1429^\circ\text{K} \pm 5.$$

Comme la droite représentative est relativement courte, on a songé à appliquer, comme pour le fer α, une méthode indirecte. On s'est adressé aux ferro-cobalt, et on a étudié ces alliages dans toute l'étendue de concentrations entre 0 et 100 pour 100 de cobalt, dans leur état γ. L'étude complète est publiée ailleurs [19], il suffira de rappeler ici que l'on a obtenu, pour tous ces alliages, des variations de $\frac{1}{\chi}$ conformes à la loi de Weiss; on a donc pu légiti-

mement déterminer des constantes de Curie en fonction du titre, et extrapoler vers 100 pour 100 de cobalt. La figure 8 montre le résultat de cette extrapolation, qui donne

$$C = 0{,}02086,$$

en bon accord avec la valeur obtenue directement.

TABLEAU XVII. — *Susceptibilité spécifique du cobalt.*

T (°C).	T (°K).	$10^6\chi$.	$\frac{10^{-3}}{\chi}$.
1343,1	1616,2	111,23	8,99
1421,0	1694,1	78,64	12,72
1460,7	1733,8	68,19	14,66
1416,1	1689,2	80,08	12,49
1415,9	1689,0	80,21	12,47
1377,4	1650,5	93,91	10,65
1311,5	1584,6	133,04	7,52
1281,0	1554,0	162,77	6,14
1234,4	1507,5	241,64	4,14
1184,3	1457,4	461,57	2,17

VIII. **Conclusions.** — Nous avons étudié les variations de la susceptibilité magnétique du nickel, du fer et du cobalt en fonction de la température. Les expériences confirment généralement les expériences anciennes dans le domaine de températures où celles-ci avaient été faites, mais elles couvrent une plus grande étendue de températures. Elles s'étendent sur près de 1000° pour le nickel. Elles ont permis de mettre en évidence des écarts systématiques à la loi de Weiss, suggérant, pour le nickel, l'existence d'un paramagnétisme constant, fort, et d'origine encore inconnue, superposé au paramagnétisme à champ moléculaire. On a montré que pour cet élément, il n'y a pas lieu de considérer deux états magnétiques distincts au-dessus du point de Curie. Pour le fer γ les expériences couvrent environ 450°, on a constaté encore la non-validité rigoureuse de la loi déduite des théories classiques. Les constantes de Curie données ne le sont qu'à titre d'indication, car on ignore ce qu'elles signifient dans de tels cas.



Fig. 8. — Constantes de Curie atomiques des alliages fer-cobalt.

Pour le fer α et pour le cobalt, on a trouvé des variations de susceptibilité, qui suivent la loi de Curie-Weiss dans les intervalles de températures étudiés. Il est bon de remarquer que ces intervalles, à l'intérieur desquels on a pu constater la validité de la loi linéaire, sont, par la nature même des alliages étudiés, relativement restreints (400° environ pour les ferroaluminiums et 200 à 300° pour les ferrocobalts), c'est-à-dire que l'existence de ces droites n'exclut pas la possibilité d'une loi plus générale.

Manuscrit reçu le 1er février 1944.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. NÉEL, *Ann. de Physique*, 1932, **18**, p. 5.
[2] P. WEISS et G. FOËX, *Arch. Sc. Phys. et Nat.*, 1911, **31**, p. 5-19 et 89-117.
[3] O. BLOCH, *Thèse Zürich*, 1912.
[3] O. BLOCH, *Thèse Zürich*, 1912; *Arch. Sc. Phys. et Nat.*, 1912, **33**, p. 293-308.
[4] H. RENKER, *Thèse Zürich*, 1913.
[5] M. ALDER, *Thèse Zürich*, 1916.
[6] J. SAFRANEK, *Rev. Métall.*, 1924, **21**, n° 2.
[7] M. PESCHARD, *Thèse Strasbourg*, 1925 et *Rev. Métall.*, 1925.
[8] E. M. TERRY, *Phys. Rev.*, 1917, **9**, 2e série, p. 394-413.
[9] M. FALLOT, *Bull. Soc. Phys.*, 1938, n° 420, 95 S.
[10] W. SUCKSMITH et R. PEARCE, *Nature*, 1937, **140**, p. 970; *Proc. Roy. Soc.*, London, 1938, A. **167**, p. 189-204.
[11] E. C. STONER, *Proc. Leeds Phil. Soc.*, 1938, **3**, **7**, p. 403-415; *Proc. Roy. Soc.*, London, 1938, A. **165**, p. 372-414.
[12] L. NÉEL, *Le magnétisme*, réunion de mai 1939, *Collection, Sc. Int. Coop. Intell.*, 1940, **2**, p. 65-164.
[13] P. WEISS et G. FOËX, *J. de Physique*, 1911, **1**, p. 284. — G. FOËX et R. FORRER, *ibid.*, 1926, **7**, p. 180.
[14] L. WEIL, *Thèse Strasbourg*, 1941.
[15] L. NÉEL, *C. R. Acad. Sci.*, 1938, 207, p. 1384.
[16] G. GUSTAFSSON, *Ann. der Phys.*, 1937, **28**, p. 121.
[17] C. MANDERS, *Ann. de Physique*, 1936, **5**, p. 167-231.
[18] L. NÉEL, *Ann. de Physique*, 1936, **5**, p. 232-279.
[19] M. FALLOT, *Métaux et Corrosion*, 1943. 18, p. 214-219.

LA TEMPÉRATURE DANS L'ANALYSE DIMENSIONNELLE

Par M. Jean VILLEY.

Sommaire. — Quand on parle de la température, on songe, en général, à son repère dans une échelle thermométrique : il n'est en rien modifié par un changement de grandeur des unités fondamentales.

Mais si, dans l'analyse dimensionnelle, on envisage la température parmi les facteurs possibles d'une loi physique, il s'agit de la température considérée comme une grandeur physique : ses dimensions doivent être celles du carré d'une vitesse pour que le système d'unités soit cohérent.

C'est en oubliant cette observation fondamentale qu'on a souvent prétendu justifier par l'analyse dimensionnelle, la loi fausse qui faisait varier la résistance aérodynamique proportionnellement à la densité de l'air et au carré de la vitesse de translation du mobile.

De telles erreurs d'application ont conduit parfois à mettre en cause l'analyse dimensionnelle elle-même et à l'accuser d'impuissance totale. On a profité de cette étude pour préciser ici ses possibilités — qui sont loin d'être négligeables — en ce qui concerne la prévision des lois physiques.

1. La loi de la résistance aérodynamique. — L'évolution des idées relatives à la loi de variation de la résistance aérodynamique sur un solide en mouvement, en fonction de l'état de l'air et de la vitesse V de translation, appelle des observations assez instructives en ce qui concerne l'analyse dimensionnelle.

Il y a plus de soixante ans, Sarrau enseignait, à l'École Polytechnique, que les considérations d'homogénéité conduisent à prévoir, pour la résistance par unité de surface, une variation proportionnelle à $p.\varphi\left(\frac{V^2\rho}{p}\right)$, en appelant ρ la densité et p la pression de l'air, ou, en notant que la célérité du son W satisfait à la condition

$$W^2 = \gamma R \mathfrak{T} = \gamma \frac{p}{\rho},$$

proportionnelle à

$$p.f\left(\frac{V^2}{W^2}\right). \qquad (1)$$

La même chose a été enseignée pendant plus de quarante ans par Émile Picard à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

Il est curieux de constater que cette conclusion essentielle ne s'est pas introduite dans les calculs des techniciens, qui ont continué à invoquer la loi de première approximation

$$F = kS\rho V^2. \qquad (2)$$

Cette loi n'est pas inadmissible *a priori*, car elle respecte l'homogénéité; mais il n'en résulte nullement qu'elle soit vraie. En fait, elle est fausse comme on s'en aperçoit dès que l'on s'écarte du domaine des vitesses moyennes où la proportionnalité à V^2 est une bonne approximation.

Les balisticiens ont bientôt constaté le désaccord flagrant de cette loi avec la réalité aux grandes vitesses qui les intéressent. Ils se sont alors contentés d'introduire un facteur de correction, et ils ont cherché à préciser et à utiliser des lois de la forme

$$F = S\rho V^2 f(V), \qquad (3)$$

bien qu'une telle loi soit un scandale, car elle égale une grandeur de dimension zéro $\frac{F}{S\rho V^2}$ à une grandeur de dimension non nulle $f(V)$.

La guerre de 1914 a fait participer aux études de balistique des mathématiciens et des physiciens de formations très diverses. Libres des idées préconçues qu'imposent, dans une technique spécialisée, les traditions qui s'y transmettent et s'y conservent, ils y ont apporté des points de vue nouveaux.

Un mathématicien, qui assimile l'air à un milieu continu pour lui appliquer des équations aux dérivées partielles, peut, à la rigueur, penser que cet air est complètement défini, au point de vue mécanique, par sa densité. Mais, pour un physicien, qui y voit un essaim de molécules, il apparaît que leur vitesse d'agitation doit intervenir dans la valeur des efforts aérodynamiques, et qu'il y a lieu de tenir compte du rapport de la vitesse de translation V à la vitesse moyenne d'agitation des molécules, ou à la célérité W du son qui lui est proportionnelle. C'est ce qu'a fait M. Darrieus, en proposant la loi

$$F = S\rho V^2 f\left(\frac{V}{W}\right) \qquad (4)$$

qui faisait disparaître le scandale de la non-homogénéité de la loi (3).

Ainsi s'introduit, par la relation $W^2 = \gamma R \mathfrak{T}$, la température, qu'il n'y avait aucune raison de négliger *à priori* comme facteur d'action possible.

Cette rectification devenait fort notable pour l'artillerie à très longues portées dont les projectiles atteignent en cours de route des altitudes fort élevées et des températures beaucoup plus basses qu'au voisinage du sol.

Malgré cette logique évidente et les premières constatations favorables, cette loi nouvelle inquiétait les habitudes acquises. Une consultation fut demandée à M. Langevin. Celui-ci, après avoir observé que la relation

$$\frac{p}{\rho} = R\mathfrak{T} = \frac{W^2}{\gamma}$$

permet de l'écrire

$$F = Sp\gamma \frac{V^2}{W^2} f\left(\frac{V}{W}\right) = Sp\varphi\left(\frac{V}{W}\right), \tag{5}$$

montra que cette forme était seule compatible avec les équations de l'hydrodynamique et la confirma expérimentalement par des mesures sur des jets d'air sortant d'un réservoir sous pressions élevées.

Ainsi était démontrée et vérifiée la forme de loi prévue par Sarrau et Picard.

C'est un succès remarquable pour l'analyse dimensionnelle, qui avait, depuis si longtemps, devancé cette confirmation.

Mais des partisans trop zélés de l'analyse dimensionnelle prétendaient y trouver la prévision de la loi (2) : cette conclusion ne serait vraie que si l'on posait en principe *a priori* que l'état de l'air est complètement défini, au point de vue résistance aérodynamique, par sa densité ρ.

Là est l'erreur : pour définir l'état de l'air, il faut donner les valeurs de *deux* des trois caractéristiques p, ρ, $\mathfrak{T}$, qui sont reliées entre elles par l'équation d'état $\frac{p}{\rho} = R\mathfrak{T}$ (ou, si l'on préfère, les valeurs de deux combinaisons indépendantes de ces trois caractéristiques).

Si l'on utilise p et ρ, comme Sarrau et Picard, on aboutit sans aucune difficulté à leur conclusion.

Mais si l'on utilise ρ et $\mathfrak{T}$, que l'on peut appeler les variables naturelles (1), il y a lieu d'éviter une erreur possible en ce qui concerne les dimensions qui doivent être attribuées à la température $\mathfrak{T}$.

2. Dimensions de la température.

— Un malentendu risque, en effet, de s'introduire du fait qu'on a l'habitude de définir la température non pas par une équation de définition qui, ramenant directement ou indirectement son évaluation à des mesures de longueur, de masse et de temps (2), indiquerait immédiatement ses dimensions, mais par un simple repère dans une échelle thermométrique.

Ce repère thermométrique est constitué par un chiffre, qui n'est altéré en aucune manière lorsque l'on change la grandeur des unités fondamentales. En effet, la température centigrade est égale à cent fois le rapport entre l'augmentation de volume d'une masse de mercure depuis la glace fondante jusqu'à la température considérée et l'augmentation de volume entre la glace fondante et l'eau bouillante. La température absolue est, au terme additif 273 près, définie de façon analogue au moyen des pressions d'une masse de gaz parfait maintenue à volume constant.

La température ainsi comprise apparaît comme une grandeur de dimension nulle, et cette illusion risque d'être encore renforcée si l'on songe à la définition thermodynamique de la température absolue au moyen des rapports des quantités de chaleur reçues et perdues dans les cycles de Carnot.

Mais lorsque l'on veut faire intervenir la température dans l'analyse dimensionnelle, il s'agit, non pas de ce repère thermométrique sans dimensions, mais d'une *grandeur physique* mesurable (et non pas seulement repérable) grâce à des relations avec les unités fondamentales, qui définiront ses dimensions.

Ces dimensions seront immédiatement indiquées par l'une quelconque des équations thermodynamiques où intervient la température.

Considérons par exemple l'équation d'état

$$\frac{p}{\rho} = R\mathfrak{T}. \tag{6}$$

Lorsque l'on identifie $\mathfrak{T}$ à son repère thermométrique, R devient une grandeur de mêmes dimensions que le quotient d'une pression par une densité, c'est-à-dire de mêmes dimensions que le carré d'une vitesse. Mais cette manière d'interpréter l'équation (6) est irrationnelle. Cette équation d'état a, en effet, la prétention de relier entre elles trois grandeurs physiques : la pression, la densité et la température; c'est donc R et non pas $\mathfrak{T}$, qu'il faut rabaisser au rôle de simple coefficient spécifique sans dimensions (3), et l'on constate que la température (gran-

(1) Elles correspondent en effet aux modes d'intervention du physicien qui, pour étudier un gaz, l'enferme dans un récipient (donnée v ou ρ) et place celui-ci dans un bain dont il règle la température $\mathfrak{T}$.

(2) De telles mesures seraient à faire à l'ordre de grandeur de l'agitation moléculaire.

(3) Il s'agit ici du coefficient *spécifique* qui figure dans l'équation d'état $pv = R\mathfrak{T}$, où $v = \frac{1}{\rho}$ est le *volume spécifique*. Si l'on veut introduire la constante *moléculaire*, il faut multiplier les deux nombres de l'équation par la masse moléculaire $\mathfrak{M}$ pour obtenir $p\mathfrak{M}v = \mathfrak{M}R\mathfrak{T}$ ou $p\mathfrak{V} = \mathfrak{R}.\mathfrak{T}$, dans laquelle $\mathfrak{V}$ représente un *volume*. La constante moléculaire $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}R$ a donc les dimensions d'une masse.

deur physique) a les mêmes dimensions que le carré d'une vitesse.

On obtient bien entendu, à titre de confirmation, le même résultat à partir de la seconde équation caractéristique des gaz parfaits :

$$U = c\mathcal{T}, \qquad (6')$$

qui, lorsque l'on réduit c au rôle de coefficient spécifique sans dimensions, donne, pour $\mathcal{T}$, les dimensions du quotient d'une énergie par une masse, c'est-à-dire encore les dimensions du carré d'une vitesse.

La même conclusion est fournie de façon encore plus immédiate par l'équation de la célérité du son

$$W^2 = \gamma R \mathcal{T}. \qquad (7)$$

Dans l'étude, par l'analyse dimensionnelle, de la résistance aérodynamique, si l'on commet l'erreur d'attribuer à la température des dimensions nulles, on aboutira à la loi fausse de proportionnalité à ρV^2, comme lorsque l'on oubliait de la faire entrer en ligne de compte. Nous vérifierons facilement, au contraire, que, si on lui attribue les dimensions du carré d'une vitesse, on prévoit la proportionnalité à $p.\varphi\left(\frac{V}{W}\right)$ démontrée et vérifiée par Langevin.

Il est bon d'éclairer pour cela les possibilités de prévision de l'analyse dimensionnelle. Elles ont été parfois exagérées, mais elles sont loin de mériter le scepticisme que cela a parfois provoqué à leur endroit.

3. Les équations de l'analyse dimensionnelle. — Il est certain, en effet, du moins si l'on admet qu'on ait su constituer un système d'unités *cohérent*, c'est-à-dire capable de formuler les lois physiques sous forme invariante, que les considérations d'homogénéité peuvent indiquer seulement qu'une loi proposée est, *a priori*, impossible si elle ne satisfait pas l'homogénéité, c'est-à-dire si elle prétend égaler deux termes dont les variations ne sont pas proportionnelles lorsque l'on change la grandeur des unités fondamentales.

Mais, lorsqu'elles constatent la non-impossibilité de la loi proposée, on pourra considérer cette loi comme certainement vraie s'il est certain qu'il en existe une entre les grandeurs considérées et s'il apparaît impossible d'en imaginer aucune autre qui satisfasse, elle aussi, à la condition d'homogénéité.

Ce dernier cas se présente en particulier, sous des conditions que l'on peut préciser, lorsque l'on suppose que toutes les grandeurs A, B, C, D, ... à relier entre elles sont définies, à partir des seules unités fondamentales de longueur, masse et temps, par des équations qui fournissent, immédiatement ou indirectement, la mesure de chacune d'elles sous la forme du produit de puissances (entières ou fractionnaires, positives ou négatives, ou éventuellement nulles) de mesures de longueurs, masses et temps.

Nous n'envisagerons que de telles grandeurs physiques.

Une équation homogène peut se mettre sous la forme d'une relation numérique entre grandeurs de degré zéro.

Les prévisions qu'il est possible de tirer de l'analyse dimensionnelle dépendent du nombre de combinaisons sans dimensions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... que l'on peut former au moyen des grandeurs A, B, C, D, ... de dimensions non nulles susceptibles d'intervenir dans la loi.

La loi invariante cherchée doit, en effet, être de la forme

$$\mathcal{A} = f(\mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots; a, b, c, \ldots), \qquad (8)$$

où a, b, c, ... représentent les grandeurs de dimension zéro — en général des angles, autrement dit des éléments de forme ou d'orientation — qui sont susceptibles d'intervenir dans le phénomène étudié; f est une fonction complètement indéterminée.

S'il n'existe qu'une combinaison invariante $\mathcal{A}$ et si a, b, c, ... restent constantes, cette loi devient

$$\mathcal{A} = C^{te}, \qquad (9)$$

et elle peut alors s'écrire sous la forme

$$A = \varphi(B, C, D, \ldots), \qquad (9')$$

où φ est une fonction connue par la définition même de $\mathcal{A}$ au moyen de $(A, B, C, D, \ldots)$.

Or, avec les hypothèses que nous avons admises relativement à la nature des grandeurs A, B, C, D, ..., on sait former des combinaisons invariantes de la forme

$$\mathcal{A} = \frac{A}{B^x C^y D^z \ldots}, \qquad (10)$$

où nous mettons en évidence la grandeur A que nous cherchons à évaluer en fonction des autres grandeurs B, C, D, ...

Il faut écrire, pour cela, que les exposants de L, de M et de T, dans les symboles dimensionnels du numérateur et du dénominateur, sont respectivement égaux.

En écrivant chacun des symboles dimensionnels sous la forme $L^\lambda M^\mu T^\tau$, et en distinguant par les indices 0, 1, 2, 3, ... les exposants λ, μ, τ, relatifs aux grandeurs A, B, C, D, ..., on obtient ainsi les trois conditions :

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4 t + \ldots \\ \mu_0 &= \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z + \mu_4 t + \ldots \\ \tau_0 &= \tau_1 x + \tau_2 y + \tau_3 z + \tau_4 t + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

imposées aux exposants inconnus x, y, z, t, ...

Le cas normal d'utilisation de ce système de trois équations est celui où il comporte trois inconnues, c'est-à-dire où la grandeur physique A

(supposée de dimensions non nulles) que nous étudions dépend de trois autres grandeurs physiques de dimensions non nulles B, C et D, autrement dit encore où nous cherchons à relier, par une loi, quatre grandeurs de dimensions non nulles.

Entre moins de quatre grandeurs de dimensions non nulles, il ne peut exister de loi invariante que sous des conditions restrictives faciles à préciser par l'analyse dimensionnelle. Entre plus de quatre grandeurs, l'analyse dimensionnelle ne peut pas prédéterminer complètement la loi, ce qui n'exclut pas d'ailleurs qu'elle puisse donner, sur elle, des renseignements très utiles.

4. **Lois reliant deux grandeurs** ($N = 1 + n = 2$). — Entre deux grandeurs de dimensions non nulles, la seule (¹) combinaison invariante possible est de la forme

$$\mathcal{A} = \frac{A}{B^x}.$$

Les équations (11) comportent une seule inconnue x, et la condition de compatibilité est alors

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\mu_0}{\mu_1} = \frac{\tau_0}{\tau_1},$$

c'est-à-dire que le symbole dimensionnel de l'une doit être identique à une puissance du symbole de l'autre, ce que nous pourrons exprimer en disant que les deux grandeurs sont de *même famille*. Cela comporte le cas particulier où elles sont de même *dimension*, c'est-à-dire où elles ont le même symbole dimensionnel, et le cas encore plus particulier où elles sont de *même espèce*.

Désignons par m la valeur commune des trois rapports ci-dessus des exposants (que l'on peut appeler *puissance* de la grandeur A par rapport à la grandeur B), la loi invariante cherchée s'écrit immédiatement sous la forme

$$A = kB^m. \qquad (12)$$

Nous aurons, par exemple, les lois suivantes. Entre deux grandeurs de même famille : la célérité du son dans un gaz varie proportionnellement à la racine carrée de la température. Entre deux grandeurs de même dimension (système électrostatique) : la capacité électrique d'une sphère est égale à son rayon. Entre deux grandeurs de même espèce : la célérité du son varie proportionnellement à la vitesse moyenne d'agitation des molécules.

5. **Lois reliant trois grandeurs** ($N = 1 + n = 3$). — Si la grandeur A dépend de deux grandeurs B et C de dimensions non nulles, la condition de compatibilité des trois équations (11) à deux inconnues x et y s'écrit en annulant le déterminant complet formé avec les 9 exposants λ, μ et τ de leurs trois symboles, soit

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Cela veut dire que l'on a simultanément

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \\ \mu_0 &= \alpha\mu_1 + \beta\mu_2, \\ \tau_0 &= \alpha\tau_1 + \beta\tau_2, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

autrement dit que chacun des trois symboles est identique au produit des deux autres symboles élevés respectivement à des puissances convenables, ce que nous exprimerons en disant que les trois grandeurs sont *associées*.

Il y a lieu de distinguer alors plusieurs hypothèses.

1° Si B et C sont de même famille, on a

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \gamma,$$

et les équations (14) deviennent

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_2} = \frac{\mu_0}{\mu_2} = \frac{\tau_0}{\tau_2} = \alpha\gamma + \beta, \qquad (15)$$

c'est-à-dire que, pour qu'il y ait une combinaison invariante $\mathcal{A}$ contenant A, il faut que A soit, lui aussi, de la même famille.

Dans ce cas exceptionnel où les trois grandeurs sont de même famille, on aura, entre leurs symboles, les relations $[B] = [A]^m$ et $[C] = [A]^n$ et la condition d'invariance de $\mathcal{A} = \frac{A}{B^x C^y}$ se réduit à $mx + ny = 1$. Il y a donc une infinité de combinaisons invariantes $\mathcal{A}$ possibles, et l'on ne peut pas prévoir la forme de la loi.

2° Si deux seulement des trois grandeurs sont de même famille, la seule combinaison invariante possible est celle qui les relie simplement l'une à l'autre. Par exemple, si l'on a, entre les symboles, la relation $[A] = [B]^m$, on aura la combinaison $\mathcal{A}' = \frac{A}{B^m}$, et la seule loi possible est $A = kB^m$. Elle n'est toutefois à retenir que s'il apparaît admissible que A soit uniquement fonction de B : on a alors un cas dégénéré qui nous ramène à celui du paragraphe 4. Si nous cherchons par exemple la loi de variation de la célérité du son W dans l'air, en fonction de son état, caractérisé par p et $\mathcal{T}$, puisque W et $\mathcal{T}$ sont de même famille, avec la relation $[W] = [\mathcal{T}]^{0,5}$ entre leurs symboles, la seule loi possible fait varier la célérité du son proportionnellement à la racine carrée de la température, sans intervention de la pression.

(¹) Toutes les puissances d'une combinaison invariante sont elles aussi des combinaisons invariantes, mais nous ne les considérerons pas comme distinctes les unes des autres.

3° Enfin, le cas le plus normal est celui où les trois grandeurs A, B et C sont de trois familles différentes. Alors la condition (13) suffit pour garantir l'existence d'une, et d'une seule, combinaison invariante complète $\mathcal{A} = \frac{A}{B^x C^y}$. En effet, puisque B et C ne sont pas de même famille, il y a au moins l'un des trois déterminants du second ordre tirés des deux dernières colonnes de (13) qui n'est pas nul. Soit par exemple

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On peut alors utiliser les deux dernières équations du système (11) pour calculer les deux inconnues x et y. Elles sont certainement toutes les deux différentes de zéro, car ni $\frac{A}{B^x}$ ni $\frac{A}{C^y}$ ne peuvent avoir l'invariance exprimée par les équations (11) puisque ni B ni C ne sont de même famille que A. Pour la même raison, il ne peut pas y avoir une autre combinaison invariante, car elle devrait être du type $\mathcal{B} = \frac{B}{C^y}$, et c'est impossible puisque B et C ne sont pas de même famille.

La seule loi invariante possible est donc alors

$$A = kB^x C^y. \tag{16}$$

Si le déterminant (13) n'est pas nul, les équations (11) n'ont pas de solution et l'on ne peut pas former de combinaison invariante contenant A, qui permettrait de déterminer une loi invariante donnant A en fonction de B et de C.

6. **Lois reliant quatre grandeurs** ($N = 1 + n = 4$). — Lorsque A dépend de trois autres grandeurs de dimensions non nulles B, C et D, nous sommes en présence du cas normal d'un système (11) de trois équations à trois inconnues x, y et z.

On sait les calculer si la condition

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{17}$$

est satisfaite.

Cette condition veut dire, d'après le paragraphe 5, qu'il n'existe pas de combinaison invariante du type $\mathcal{B} = \frac{B}{C^{y'} D^{z'}}$. Elle exclut aussi le cas où deux des trois grandeurs B, C, D seraient de même famille, ce qui rendrait proportionnels entre eux les éléments de deux colonnes de (17).

Dans ce cas, il existe une combinaison invariante $\mathcal{A} = \frac{A}{B^x C^y D^z}$ et il n'en existe aucune autre. La seule loi invariante possible est alors

$$A = f(a, b, c, \ldots) B^x C^y D^z \tag{18}$$

qui sera certainement la loi cherchée, si du moins cette loi existe.

Pour qu'elle fasse effectivement intervenir toutes les grandeurs envisagées, il faut que x, y et z soient tous non nuls, c'est-à-dire que chacun des trois déterminants obtenus en remplaçant l'une des colonnes de (17) par les exposants du symbole $[A]$ (indice zéro) soit différent de zéro. Cela veut dire que la grandeur A ne doit être associée à aucun des trois groupes de deux des grandeurs B, C, D.

Si cette condition n'est pas satisfaite, on aura, par exemple,

$$[A] = [C]^m [D]^n,$$

autrement dit

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= m\lambda_2 + n\lambda_3, \\ \mu_0 &= m\mu_2 + n\mu_3, \\ \tau_0 &= m\tau_2 + n\tau_3, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

et ces valeurs portées dans les équations (11) les transforment en un système de trois équations homogènes

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 x + \lambda_2 (y - m) + \lambda_3 (z - n) &= 0, \\ \mu_1 x + \mu_2 (y - m) + \mu_3 (z - n) &= 0, \\ \tau_1 x + \tau_2 (y - m) + \tau_3 (z - n) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

dont le déterminant complet est différent de zéro. Il n'admet que les solutions toutes nulles

$$x = (y - m) = (z - n) = 0,$$

d'où

$$x = 0, \qquad y = m, \qquad z = n,$$

et la loi (18) prend la forme dégénérée

$$A = f(a, b, c, \ldots) C^m D^n, \tag{21}$$

Elle ne peut pas se réduire à la forme

$$A = f(a, b, c, \ldots) C^y, \tag{22}$$

car les deux conditions simultanées

$$\lambda_0 = m\lambda_2 + n\lambda_3, \qquad \mu_0 = m\mu_2 + n\mu_3, \qquad \tau_0 = m\tau_2 + n\tau_3,$$

et

$$\lambda_0 = p\lambda_1 + q\lambda_2, \qquad \mu_0 = p\mu_1 + q\mu_2, \qquad \tau_0 = p\tau_1 + q\tau_2,$$

qui annuleraient respectivement x et z, annuleraient le déterminant (17).

Envisageons maintenant le cas où le déterminant (17) des exposants de $[B]$, $[C]$ et $[D]$ est nul, c'est-à-dire où les trois grandeurs B, C et D sont associées.

Les raisonnements du paragraphe 5 montrent qu'il existe alors au moins une combinaison invariante des trois grandeurs B, C, D, que l'on peut noter

$$\mathcal{D} = \frac{D}{B^{x'} C^{y'}},$$

cette écriture englobant le cas particulier $\frac{D}{C^{y'}}$.

Alors la loi cherchée

$$A = f(a, b, c, \ldots) B^x C^y D^z,$$

dont on ne sait pas calculer les exposants x, y, z, pourra s'écrire

$$A = f(a, b, c, \ldots) B^{x+x'z} C^{y+y'z} \left(\frac{D}{B^{x'} C^{y'}}\right)^z,$$

ou

$$A = f(a, b, c, \ldots) B^{x''} C^{y''} \mathcal{D}^z, \qquad (23)$$

en posant

$$x + x'z = x'' \quad \text{et} \quad y + y'z = y''.$$

Mais les conditions d'homogénéité qu'invoque l'analyse dimensionnelle ne peuvent donner aucun renseignement sur l'exposant z de la combinaison invariante $\mathcal{D}$. Par conséquent, z reste arbitraire, et l'on peut prendre, pour A, une somme de termes (23) contenant, avec les mêmes exposants x'' et y'', des exposants variés z. C'est-à-dire que, au regard de l'analyse dimensionnelle, la grandeur A peut être une fonction arbitraire de l'invariant $\mathcal{D}$ et l'on devra écrire

$$A = f(a, b, c, \ldots; \mathcal{D}) B^{x''} C^{y''}. \qquad (24)$$

On peut alors appliquer à la recherche des exposants x'' et y'' les raisonnements du paragraphe 5.

Si A, B et C sont de familles différentes, x'' et y'' sont déterminées, et l'on a une loi analogue à la loi (16), mais avec cette différence fondamentale que le coefficient de $B^{x''} C^{y''}$, au lieu d'être une constante (lorsque les grandeurs sans dimensions a, b, c, ... sont supposées données), est une fonction inconnue de la combinaison invariante $\mathcal{D} = \frac{D}{B^{x'} C^{y'}}$ par laquelle D intervient dans la loi cherchée.

Si A est de même famille que l'une des autres grandeurs, soit $[A] = [B]^m$, cette loi dégénère en

$$A = f(\mathcal{D}) B^m. \qquad (24')$$

Elle devient $A = kB^m$ si l'on s'impose de maintenir constante la combinaison $\mathcal{D}$.

Enfin, dans le cas exceptionnel où A, B et C seraient tous les trois de la même famille (ce qui exigerait aussi D de cette même famille puisque $\mathcal{D}$ est invariant), l'analyse dimensionnelle ne pourrait fournir aucun renseignement sur la loi.

7. Cas où $N = 1 + n$ est supérieur à 4. — Lorsque le nombre des grandeurs de dimensions non nulles est supérieur à 4, l'analyse dimensionnelle ne peut jamais déterminer la loi puisque le système des trois équations (11) contient plus de trois inconnues ($n > 3$).

Elle peut toutefois donner sur elle, par les raisonnements des paragraphes 4, 5 et 6, des renseignements qui, surtout dans le cas $N = 5$, restent fort utiles.

En effet, ils permettent de reconnaître les combinaisons invariantes des types $\mathcal{D} = \frac{D}{E^m F^n G^p}$ ou $\mathcal{E} = \frac{E}{F^{n'} G^{p'}}$, ou $\mathcal{F} = \frac{F}{G^{p''}}$ que l'on peut former avec 4, 3 ou 2 des grandeurs B, C, D, E, F, G, ... dont dépend A, et chacune d'elles permet, dans l'expression générale

$$A = kB^x C^y D^z E^t F^u G^v, \ldots, \qquad (25)$$

de faire disparaître l'une des grandeurs, du moins sous sa forme explicite, par exemple D^z, pour le remplacer par une fonction inconnue de la combinaison invariante $\mathcal{D}$, qui s'introduit dans k.

Pour opérer méthodiquement cette élimination progressive, on recherche d'abord les groupes de deux grandeurs de même famille, qui introduiront des combinaisons invariantes du type $\mathcal{F}$, puis les groupes de trois grandeurs associées, qui introduisent des combinaisons du type $\mathcal{E}$. Ayant ainsi fait disparaître du second membre tous les groupes de deux grandeurs de même famille et de trois grandeurs associées, on est sûr, s'il reste encore $(3 + q)$ grandeurs, de pouvoir former avec elles q combinaisons invariantes du type $\mathcal{D}$.

Alors, s'il existait au second membre de (25) au moins trois grandeurs non associées, on arrive à la loi

$$A = f(a, b, c, \ldots; \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots) B^x C^y D^z \qquad (26)$$

qui n'est pas dégénérée si la grandeur A n'est associée à aucun des groupes de deux des grandeurs B, C, D.

Si A est associée avec C et D, on a la forme dégénérée du type (21)

$$A = f(a, b, c, \ldots; \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots) C^m D^n, \qquad (26')$$

ce qui ne veut pas dire d'ailleurs que A soit indépendant de B, qui peut intervenir dans les combinaisons invariantes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, ...

Nous avons vu qu'elle ne peut pas aboutir à la forme

$$A = f(a, b, c, \ldots; \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots) C^m. \qquad (26'')$$

qui correspondrait à (22).

Si le second membre de (25) ne contient pas trois grandeurs non associées, on peut encore, dans (26), éliminer D au moyen de la combinaison invariante $\mathcal{D}' = \frac{D}{B^m C^m}$, et l'on arrivera alors à la loi

$$A = f(a, b, c, \ldots; \mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots) B^{x'} C^{y'}. \qquad (27)$$

Elle a une forme analogue à la loi (26'), mais f contient $(N - 3)$ combinaisons invariantes au lieu de $(N - 4)$.

Lorsqu'il y a dans f plusieurs combinaisons invariantes qui y interviennent simultanément, il n'y a pas grand'chose d'utile à tirer de ces résultats. Mais si nous considérons par exemple le cas où A dépend de quatre grandeurs ($n = 4$, d'où $N = 5$) dont trois au moins ne soient pas associées entre

elles, on obtient

$$A = f(\mathcal{E}) B^x C^y D^z, \qquad (28)$$

qui permet d'étudier la variation de A en fonction de B, C et D, *lorsque* $\mathcal{E}$ *est maintenu constant* [ce qui donne $f(\mathcal{E}) = k$]. Nous ne savons toutefois rien dire *a priori* de la forme de la variation en fonction de $\mathcal{E}$.

8. Application à la résistance aérodynamique. — Appliquons ces notions à l'étude de la force aérodynamique F à laquelle est soumis un mobile en mouvement uniforme dans l'air supposé en équilibre (sauf la perturbation provoquée par le mobile lui-même).

Les grandeurs susceptibles d'intervenir dans la valeur de F sont les suivantes :

1° Les caractéristiques de forme du mobile, c'est-à-dire :

a. les angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, \ldots$ qui définissent sa forme géométrique;

b. une longueur de base l, qui le définit dans la famille des solides géométriquement semblables.

2° Les caractéristiques de l'état de sa surface, qui correspondent à la définition géométrique de ses aspérités par les éléments suivants, à fournir pour chacune d'elles (d'indice k) :

c. les angles $\Theta_{k,1}, \Theta_{k,2}, \ldots, \Theta_{k,i}, \ldots$ qui définissent sa forme :

d. une longueur de base λ_k.

3° Les caractéristiques de la translation, c'est-à-dire :

e. sa grandeur V;

f. sa direction, définie par rapport au solide au moyen de deux angles i et j.

4° Les caractéristiques de l'état de l'air dans les régions non perturbées par le mobile; elles seront fournies par deux des trois caractéristiques p, ρ, $\mathfrak{T}$. Pour mettre en évidence le malentendu possible signalé au paragraphe 2, nous choisirons :

g. la densité ρ;

h. la température $\mathfrak{T}$.

Si l'on ne fait pas l'hypothèse de surfaces parfaitement polies, toutes les longueurs λ_k font un nombre très élevé (¹) de grandeurs de dimensions non nulles. Mais nous pouvons, comme il a été dit au paragraphe 7, les remplacer par les rapports $\varepsilon_k = \dfrac{\lambda_k}{l}$ qui passeront dans le coefficient sans dimensions $f(\ldots)$.

Suivant la remarque déjà faite, l'analyse dimensionnelle ne peut rien nous dire sur la manière dont les $\Theta_{k,i}$ et les ε_k influent sur la force aérodynamique F. Mais cela ne nous empêchera pas d'étudier les variations de celle-ci pour les valeurs fixes des Θ et des ε qui correspondent à un mobile donné.

Nous allons vérifier facilement que c'est en faisant, plus ou moins implicitement, l'erreur qui considère la température $\mathfrak{T}$ comme une grandeur sans dimensions que l'on aboutit à la loi fausse de variation proportionnelle à ρV^2.

Il ne reste alors, en effet, comme grandeurs de dimensions non nulles à relier à F que l, V et ρ, et l'on écrira alors

$$F = f(\ldots, \theta_k, \ldots, \Theta_{ki}, \ldots, \varepsilon_k, \ldots; i, j; \mathfrak{T})\, l^x V^y \rho^z.$$

Cela enlève tout espoir de prévoir la loi de variation en fonction de la température, mais on se trouve alors dans le cas normal des trois équations (11) à trois inconnues x, y, z, obtenues en écrivant les conditions d'homogénéité

$$(LMT^{-2}) = (LM^0T^0)^x (LM^0T^{-1})^y (L^{-3}MT^0)^z,$$

car le déterminant (17) est alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Les trois équations

$$\begin{aligned} 1 &= x + y - 3z, \\ 1 &= z, \\ -2 &= -y \end{aligned}$$

donnent immédiatement

$$z = 1, \qquad y = 2, \qquad x = 1 + 3 - 2 = 2,$$

c'est-à-dire

$$F = f(\theta, \Theta, \varepsilon; i, j; \mathfrak{T})\, l^2 V^2 \rho,$$

ou, pour un mobile donné, sous une incidence donnée, en laissant en évidence la surface S de son maître-couple pour respecter l'homogénéité,

$$F = f(\mathfrak{T}) S \rho V^2. \qquad (29)$$

Cette loi a, sur la loi (3), la double supériorité de respecter l'homogénéité (puisqu'elle considère $\mathfrak{T}$ comme de dimensions nulles) et de ne pas exclure, *a priori*, une influence de la température sur la résistance aérodynamique. Mais, comme la loi (2), elle est fausse, puisqu'elle exige, à densité et température constantes, la proportionnalité à V^2.

Il y a donc eu une erreur dans notre raisonnement dimensionnel, et elle réside justement dans l'assimilation de la température à une grandeur sans dimensions.

Si, conformément aux conclusions du paragraphe 2, nous donnons à $\mathfrak{T}$ les dimensions du carré d'une

(¹) A moins que l'on ne suppose toutes les aspérités identiques entre elles.

vitesse [et nous pouvons, conformément à l'équation (7) la mesurer par le carré de la célérité du son], nous écrirons, pour un mobile donné sous une incidence donnée, la relation

$$F = kl^x V^y \rho^z \mathcal{T}^t.$$

Elle relie 5 grandeurs de dimensions non nulles, donc ne peut pas complètement déterminer la loi; mais les deux grandeurs de même famille V et $\mathcal{T}$ permettent l'élimination de $\mathcal{T}$. Celle-ci apparaît encore plus claire si l'on remplace $\mathcal{T}$ par sa mesure W^2 pour écrire

$$F = kl^x V^y \rho^z W^{2t},$$

où V et W sont deux grandeurs de même dimension et même de la même espèce.

On arrive alors à

$$F = \varphi\left(\frac{V^2}{W^2}\right) l^x V^{y'} \rho^z,$$

et le calcul qui a fourni (29) aboutit à

$$F = \varphi\left(\frac{V^2}{W^2}\right) S \rho V^2, \qquad (30)$$

que l'on peut écrire autrement, en tenant compte de

$$\frac{p}{\rho} = R\mathcal{T} = \frac{1}{\gamma} W^2,$$

$$F = \varphi\left(\frac{V^2}{W^2}\right) S p \gamma \frac{V^2}{W^2},$$

ou encore

$$F = Spf\left(\frac{V^2}{W^2}\right). \qquad (30')$$

C'est la loi donnée par Darrieus et Langevin, d'accord avec Sarrau et Picard, et ce résultat justifie l'assimilation dimensionnelle de $\mathcal{T}$ au carré d'une vitesse.

On peut d'ailleurs, à titre de contrôle supplémentaire, vérifier que l'on aboutit bien à la loi (30') par l'analyse dimensionnelle conduite sans faire intervenir explicitement $\mathcal{T}$, de façon à écarter toute hésitation : il suffit de définir l'état de l'air par p et ρ.

On écrira alors

$$F = kl^x V^y \rho^z p^t$$

qui contient encore quatre inconnues, mais sans couple de grandeurs de même famille.

Pour guider l'élimination, nous formerons le tableau des exposants des divers symboles dimensionnels :

F	l	V	ρ	p
$[LMT^{-2}]$	$[LM^0T^0]$	$[LM^0T^{-1}]$	$[L^{-3}MT^0]$	$[L^{-1}MT^{-2}]$
1	1	1	−3	−1
1	0	0	1	1
−2	0	−1	0	−2

Nous constatons que le déterminant relatif à $[V]$, $[\rho]$ et $[p]$ est nul, c'est-à-dire que ces trois grandeurs sont associées et fournissent, par conséquent, une combinaison sans dimensions que nous pourrons écrire *a priori* sous la forme $\frac{V}{\rho^m p^n}$, avec les conditions

$$1 = -3m - n,$$
$$0 = m + n,$$
$$-1 = -2n,$$

qui donnent immédiatement $n = \frac{1}{2}$ et $m = -\frac{1}{2}$ d'où la combinaison invariante $\frac{V.\rho^{0,5}}{p^{0,5}}$. D'ailleurs, toutes les puissances d'une combinaison invariante sont aussi des combinaisons invariantes qu'il n'y a pas lieu de considérer comme distinctes les unes des autres. Il sera plus commode de faire disparaître les exposants fractionnaires en prenant $\frac{V^2\rho}{p}$ qui permet d'éliminer l'une de ces trois grandeurs. Si l'on élimine ρ, on aboutit alors à une loi de la forme

$$F = f\left(\frac{V^2\rho}{p}\right) l^x V^{y'} p^{z'}.$$

Le déterminant des exposants de $[l]$, $[V]$ et $[p]$ est égal à $1 \neq 0$ et l'on peut calculer les inconnues x, y' et z'; mais nous observerons de suite que celui obtenu en substituant $[F]$ à $[V]$ est nul, c'est-à-dire que les grandeurs F, l et p sont associées et que la loi se réduit à

$$F = f\left(\frac{V^2\rho}{p}\right) l^x p^{z'},$$

c'est la forme dégénérée (26').

On peut calculer

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 - (-2 - 1) - 2 = 2$$

et

$$z' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1.$$

Mais on pouvait aussi observer immédiatement que la seule combinaison de p et l homogène à une force est le produit pl^2 d'une pression par une surface.

On obtient finalement la loi

$$F = f\left(\frac{V^2\rho}{p}\right) Sp. \qquad (31)$$

Elle se confond bien avec la loi (30'), car

$$\frac{p}{\rho} = R\mathcal{T} = \frac{1}{\gamma} W^2.$$

9. Conclusion. — Comme conclusion, nous pouvons dire que, au point de vue de l'analyse dimensionnelle, la température d'un gaz parfait, repérable par l'échelle thermométrique, est *définie*

par l'équation

$$\mathcal{T} = \frac{W^2}{\gamma R} \qquad (32)$$

qui se réfère à la mesure de la célérité du son, c'est-à-dire indirectement à la vitesse d'agitation des molécules, et où γ et R sont des coefficients numériques caractéristiques du gaz considéré.

On peut donner, au coefficient spécifique R, pour chaque gaz parfait, une valeur telle que, *dans un système d'unités donné*, la mesure $\frac{W^2}{\gamma R}$ de la température se trouve égale au repère thermométrique de l'échelle absolue, mais un changement d'unités fera cesser cette concordance puisque la température, grandeur physique définie par (32), variera proportionnellement à $(LT^{-1})^2$.

On observera que cette définition de la température par l'agitation moléculaire ne peut permettre de prévoir par analyse dimensionnelle les lois où la température intervient que si ses variations font exclusivement varier la vitesse d'agitation des éléments qui participent à l'agitation thermique, sans altérer la constitution du système matériel étudié. Par exemple, la dissociation des molécules d'un gaz polyatomique met en défaut la loi des gaz parfaits. Il en était déjà de même pour l'intervention progressive des vibrations intramoléculaires conformément à la théorie des quanta.

Cela limite beaucoup les possibilités ouvertes à l'analyse dimensionnelle, car les variations de température paraissent très souvent modifier la constitution des systèmes matériels.

Nous terminerons par une remarque essentielle relative à la signification qu'il faut attribuer au fait que deux grandeurs sont de même dimension. Cela ne prétend pas introduire une assimilation au point de vue de leur *nature intime*, mais seulement une relation entre leurs *mesures*, qui, lorsque l'on prend une unité de masse M fois plus petite, une unité de longueur L fois plus petite et une unité de temps T fois plus petite, se trouvent multipliées dans le même rapport égal à $(L^{\lambda} M^{\mu} T^{\tau})$.

Le groupement par familles dépend donc essentiellement des équations adoptées pour définir les unités dérivées, c'est-à-dire qu'on aura des groupements différents dans deux systèmes d'unités différents. Mais, si l'on suppose ces deux systèmes cohérents, cela n'empêche nullement l'analyse dimensionnelle, dont les raisonnements prennent en considération ces groupements divers, d'en tirer des conclusions concordantes en ce qui concerne l'élimination de lois impossibles *a priori*. Il n'y a là rien qui puisse mettre en défaut les conclusions détaillées ci-dessus où sont précisées les possibilités de prévision de l'analyse dimensionnelle : elles sont fort éloignées d'être négligeables.

Manuscrit reçu le 2 janvier 1944.

NOUVELLE MÉTHODE DE MESURE
DES INDICES DE RÉFRACTION ET D'ABSORPTION ÉLECTRIQUES
POUR LA GAMME DES ONDES DÉCIMÉTRIQUES ET MÉTRIQUES

Par Jean BENOIT.
Laboratoire d'Enseignement de Physique de la Sorbonne.

Sommaire. — 1re *Partie :* Exposé du principe mis en œuvre; rappel des procédés de mesure de la longueur d'onde et de la surtension; développement de la base théorique de la méthode.

2e *Partie :* Application des résultats précédents au problème de la mesure de n et χ proprement dits. On indique la façon de construire divers abaques ainsi que des modes d'exploitation très simples de ceux-ci.

Description de l'appareillage auxiliaire nécessaire aux mesures.

3e *Partie :* Détails de construction de la ligne coaxiale de mesure et de ses accessoires; réglages et contrôle expérimental. Résultats expérimentaux relatifs à des diélectriques solides. Complément théorique pour la mesure sur des diélectriques liquides; résultats expérimentaux et discussion.

PREMIÈRE PARTIE.

Introduction.

Lorsqu'une onde électromagnétique plane entretenue se propage suivant une direction xx' dans un milieu conducteur ou dispersif, le champ électrique ou le champ magnétique sont de la forme

$$E = A\, e^{-2\pi\chi\frac{x}{\lambda}} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \qquad (1)$$

λ étant la longueur d'onde dans le milieu considéré et T la période.

Si v est la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu et c sa vitesse dans le vide, on a $\lambda = v.T$ et $\lambda_0 = c.T$ (λ_0 longueur d'onde dans le vide).

Par définition, l'indice de réfraction du corps considéré est, pour l'onde utilisée,

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda}.$$

On appelle indice d'absorption le coefficient χ de la formule (1); il est tel que l'amplitude de l'onde est multipliée par $e^{-2\pi\chi}$ après un trajet d'une longueur d'onde dans le corps en question.

La théorie de Maxwell conduit, d'autre part, à définir une constante diélectrique complexe

$$\varepsilon = [n(1 - j\chi)]^2 \qquad (j = \sqrt{-1}).$$

En posant

$$\varepsilon' = n^2(1 - \chi^2), \qquad \varepsilon'' = 2n^2\chi, \qquad (2)$$

ε prend la forme

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''.$$

Le calcul montre que cette relation signifie que, si l'on remplit avec un corps absorbant un condensateur (de capacité dans le vide C_0) soumis à une tension à haute fréquence de pulsation ω, ce condensateur devient équivalent à une capacité $C = \varepsilon' \times C_0$ en parallèle avec une résistance de valeur $R = \frac{1}{C_0\omega\varepsilon''}$.

ε' est donc la constante diélectrique au sens habituel et ε'' caractérise les pertes dans le diélectrique du condensateur. Enfin, le rapport $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{1}{C\omega R}$ donne ce que les électrotechniciens appellent l'angle de perte δ, par la relation

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{C\omega R} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{2\chi}{(1-\chi^2)} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \chi.$$

Plus le diélectrique est absorbant, plus l'angle de perte est grand.

En résumé, pour étudier la dispersion et l'absorption d'un corps, on pourra mesurer soit n et χ, soit ε' et ε''.

Nous nous proposons de mesurer ces constantes à des fréquences hertziennes très élevées (ne dépassant cependant pas 2000 mégacycles) par une méthode permettant d'opérer soit sur des corps solides, soit sur des volumes de liquide ne dépassant pas quelques centimètres cubes.

Dans le domaine des ondes métriques, décimétriques ou centimétriques, les méthodes utilisées

jusqu'à maintenant peuvent être classées en quatre groupes :

1° Première méthode de Drude (et ses dérivées). — En 1895, Drude [1] a mis au point, pour la mesure de la constante diélectrique des liquides, un dispositif basé sur la propagation des ondes le long d'une ligne constituée par deux fils métalliques parallèles immergés dans le liquide. En étudiant les ondes stationnaires qui se forment sur la ligne, on peut calculer ε' (et ε''). Depuis, bien d'autres chercheurs ont utilisé cette méthode ou des méthodes analogues [2] [3]. Le rayonnement notable d'une ligne à deux fils parallèles et les réflexions parasites sur les parois de la cuve qui contient le liquide sont les causes de diverses perturbations difficiles à éviter.

Drake, Pierce et Dow [4], en 1930, ont amélioré ce dispositif en utilisant une ligne coaxiale (c'est-à-dire constituée par deux cylindres métalliques ayant le même axe) remplie de liquide. On est ainsi débarrassé des erreurs dues au rayonnement. Le procédé a été repris par Bergmann en 1932 [5], par Slevogt en 1939 [6] et Abadie en 1943 [8]. Pour des ondes allant de quelques centimètres à quelques mètres, l'erreur sur ε' est, en général, de quelques unités pour 100 et celle sur ε'' est de 5 à 12 pour 100.

Cette méthode nécessite un volume important de liquide et ne s'applique pas aux corps solides.

2° Deuxième méthode de Drude (et ses dérivées). — Elle met également en œuvre des ondes stationnaires formées sur une ligne. Mais cette dernière se trouve cette fois dans l'air et se termine par un très petit condensateur dont les armatures sont séparées par le diélectrique étudié.

Drude et tous ses successeurs [9] à [17] ont utilisé une ligne à deux fils parallèles. On est encore très gêné par le rayonnement important d'une telle ligne. Abadie [9] a essayé d'en tenir compte; chaque mesure nécessite alors un calcul par approximations successives et les hypothèses faites pour mener à bien ce calcul ne peuvent rendre parfaitement compte des pertes par rayonnement. Les autres chercheurs ne tiennent pas compte du rayonnement ni des pertes dans les conducteurs de la ligne et ils indiquent rarement la précision atteinte. On peut se demander, dans ces conditions, si les erreurs généralement admises aujourd'hui (2 à 5 pour 100 sur ε' et 5 à 10 pour 100 sur ε'') sont justifiées. La discordance fréquente entre les résultats expérimentaux de nombreux mémoires permet d'en douter.

Enfin, cette méthode a l'inconvénient de nécessiter un étalonnage préalable avec des corps de constante diélectrique connue.

3° Méthodes optiques. — On peut aussi calculer l'indice d'absorption d'un diélectrique en mesurant le rapport des intensités de l'onde hertzienne avant et après interposition d'une épaisseur connue du matériau. Puis, on mesure le coefficient de réflexion de ce matériau et l'on en déduit l'indice de réfraction connaissant l'indice d'absorption. Ce genre de technique, très analogue à celui employé en optique et déjà utilisé par Cole en 1896 [18], a été mis en œuvre en particulier par Seeberger [19] en 1933, puis pour des ondes centimétriques par Esau et Bäz [20] (1937), Bäz [21] (1939), Kebbel [22] (1939). La précision est faible par suite des nombreuses perturbations possibles dues aux réflexions ou diffractions parasites; l'erreur est de l'ordre de 10 à 20 pour 100. En outre, il faut pouvoir disposer d'assez grandes quantités du matériau étudié.

4° Méthode utilisant la résonance d'une cavité. — Les progrès réalisés dans l'étude de la propagation des différents types d'ondes hertziennes courtes, non plus sur des lignes, mais dans des conducteurs creux, tels que des tubes métalliques, permettent d'envisager l'application de ce genre de phénomène à l'étude des diélectriques.

Les indications de Fejer [23] (1941) sur l'utilisation d'un tuyau de longueur variable contenant une plaque de diélectrique, sont trop succinctes pour qu'on puisse juger du champ d'application de sa méthode et de la précision qu'on peut en attendre; aucun exemple de mesure n'est donné.

Borgnis a publié, en 1942, un mémoire [24] où il décrit un appareillage utilisant une cavité métallique en résonance pour une certaine longueur d'onde. L'introduction dans cette cavité d'une baguette d'un diélectrique détruit la résonance; on rétablit celle-ci en faisant varier la fréquence de l'oscillateur. De cette variation de fréquence et du changement de l'amortissement de la cavité, Borgnis déduit la constante diélectrique et l'angle de perte de divers isolants solides (trolitul, calit, ambre pressé, verre, pertinax) pour $\lambda = 14$ cm. Cette méthode nécessite un oscillateur à fréquence variable de façon continue. On peut se demander si elle est susceptible de s'appliquer aisément à des diélectriques liquides et à des corps doués de dispersion et d'absorption notables, et quelle en serait la précision.

Signalons enfin qu'aux ondes métriques, on mesure souvent les pertes diélectriques des liquides à partir de l'échauffement de ceux-ci dans le champ électrique de haute fréquence [25] à [30].

Cet examen succinct des méthodes de mesure actuellement connues [1] nous amène à conclure que, pour l'étude de diélectriques solides ou liquides (de dispersion et absorption quelconques) en faible quantité, la deuxième méthode de Drude paraît seule satisfaisante dans le domaine de fréquence qui

(1) Autant que permet d'en juger notre bibliographie forcément amputée de la plupart des travaux anglais et américains postérieurs à 1940.

nous intéresse. Cependant, le dispositif à ligne de Lecher et condensateur possède les gros inconvénients que nous avons signalés plus haut.

Aussi, avons-nous songé à transposer le principe de cette méthode en l'appliquant à une ligne coaxiale pour éviter le rayonnement.

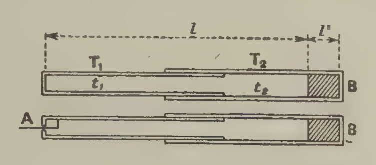


Fig. 1.

Nous utilisons donc une ligne de longueur réglable constituée, comme l'indique la figure 1, par quatre tubes coulissant formant une paire de conducteurs coaxiaux. Elle est couplée convenablement en A à un oscillateur et se ferme sur une impédance constituée par une portion de ligne de longueur l' occupée par le diélectrique et court-circuitée en B par une paroi métallique plane. L'amplitude du courant traversant l'entrée de la ligne passe par des maxima I pour certaines valeurs L de la longueur l de la ligne. On mesure I et L en présence du diélectrique, en un des maxima; on recommence en remplaçant le diélectrique par de l'air, d'où I_0 et L_0 correspondant au maximum de même rang, et l'on calcule la surtension Q de la ligne. *Nous démontrerons qu'on peut déduire directement de ces données l'indice de réfraction du diélectrique et son indice d'absorption.*

Par suite de l'effet de peau et grâce à un couplage convenable (qui sera précisé en temps utile), les courants de haute fréquence se propagent sur cette ligne à l'intérieur d'une cavité presque complètement close. *Les pertes par rayonnement sont donc réduites au minimum.* L'expérience montre que l'opérateur peut s'approcher de la ligne ou la toucher sans apporter de perturbation aux appareils de mesure. D'autre part, *nous tiendrons compte de la valeur de la surtension de la ligne et, par conséquent, des pertes dans les conducteurs en cuivre qui constituent celle-ci.* On conçoit, d'autre part, que *le volume de diélectrique employé est très minime. Enfin, le processus que nous décrirons permet des mesures absolues et il est applicable même aux corps à très fortes pertes.*

Tels sont les principaux avantages de la méthode que nous proposons.

L'exposé qui va suivre se divise de la façon suivante :

Chapitre I. — Étude des variations du module de l'impédance d'entrée d'une ligne court-circuitée, en fonction de la longueur de celle-ci, et application des résultats établis à la recherche de la longueur d'onde, et au calcul de la surtension Q de la ligne.

Chapitre II. — Étude de l'impédance d'entrée d'une ligne terminée par une impédance quelconque inconnue. Mesure de cette dernière à partir des données expérimentales définies plus haut. Examen du champ d'application de la théorie précédente.

Chapitre III. — Application de la théorie du Chapitre II à la mesure des indices n et χ d'un diélectrique. Construction de différents abaques nécessaires à cette mesure.

Chapitre IV. — Description des appareils auxiliaires réalisés en vue des mesures (oscillateurs, stabilisateurs, thermostat, bâti de mesure).

Chapitre V. — Description des caractéristiques essentielles des lignes de mesure et d'un ondemètre à ligne coaxiale.

Chapitre VI. — Mesures sur des diélectriques solides et discussion de la précision obtenue.

Chapitre VII. — Mesures sur des diélectriques liquides. Complément théorique pour la conduite de ces mesures. Contrôle de notre méthode par l'étude de liquides non dispersifs dont la constante diélectrique, est mesurée par ailleurs en ondes longues. Résultats expérimentaux et discussion pour divers liquides dispersifs et absorbants; comparaison avec les prévisions de la théorie de Debye.

N. B. — Pendant le cours de ce travail, une communication a été faite à la 5e Section de la Société des Électriciens en avril 1942 sur la mesure des constantes diélectriques en ondes courtes, par MM. Clavier, Saphores et Denis. Ces mesures ont été exécutées à des longueurs d'onde de 1 m au minimum, *avec une ligne coaxiale ouverte à l'extrémité réceptrice*, celle-ci étant occupée par une tranche d'un isolant solide. C'est donc, comme dans notre cas, l'exploitation de la deuxième méthode de Drude avec une ligne coaxiale. Mais le dispositif à ligne ouverte a l'inconvénient de rayonner à l'extrémité où est placé le diélectrique étudié. D'autre part, *les modes de couplage de la ligne avec l'oscillateur et avec l'appareil de mesure du courant utilisés par ces auteurs ne sont pas applicables pratiquement à des longueurs d'onde inférieures à 1 m. Enfin, les formules indiquées ne peuvent être employées que pour des isolants ayant de très faibles pertes.*

Ces points essentiels différencient nettement notre méthode de celle employée par les Laboratoires du Matériel Téléphonique.

Chapitre I.

Nous allons exposer, dans ce chapitre, quelques résultats classiques qui nous seront utiles dans la suite [38], [39], [40].

Considérons la ligne coaxiale schématisée sur la figure 2. Elle est complètement remplie d'un

même diélectrique. L'extrémité B est court-circuitée et l'extrémité A est couplée à l'oscillateur O. Ce couplage est supposé assez lâche pour qu'on puisse admettre que la force électromotrice e, induite dans l'entrée de la ligne, reste constante quand la longueur de celle-ci varie. Nous supposons également que cette force électromotrice est ponctuelle. La validité de ces hypothèses sera contrôlée par l'accord entre l'expérience et les résultats prévus.

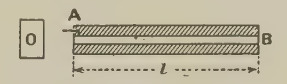


Fig. 2.

Nous nous proposons d'étudier les variations d'amplitude du courant traversant l'entrée de la ligne en fonction de la longueur de celle-ci. Or, la valeur de ce courant est $i = \frac{e}{Z}$, Z étant l'impédance de la ligne vue de l'entrée. Nous avons donc à étudier $|Z|$ (module de Z) en fonction de l.

1. Notations. — ω, pulsation de l'onde sinusoïdale qui se propage sur la ligne;
T, période de celle-ci;
R, résistance par unité de longueur de la ligne;
L, self » » »
C, capacité » » »
G, perditance » » »
u, vitesse de phase de l'onde le long de la ligne;
c, vitesse de phase de l'onde dans le diélectrique libre;
λ, longueur d'onde le long de la ligne (différente de la longueur d'onde dans le diélectrique libre, car $u \neq c$);
$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$, constante de longueur d'onde;
β, coefficient d'amortissement.

Enfin, la constante de propagation le long de la ligne est

$$P = \beta + j\alpha = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)}. \qquad (3)$$

2. Diverses pertes dans la ligne. Relations avec les constantes linéiques. — On peut distinguer :

1° Les pertes *dans le cuivre* caractérisées par le quotient $\frac{R}{L\omega}$.

Posons $\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{L\omega}$. On cherche toujours à réaliser le minimum de pertes dans le cuivre. C'est pourquoi φ est toujours très petit. Nous en verrons plus loin l'ordre de grandeur.

2° Les pertes *dans le diélectrique*, caractérisées par le quotient $\frac{G}{C\omega}$. On sait que l'égalité $\operatorname{tg}\delta = \frac{G}{C\omega}$ relie l'angle de perte du diélectrique à la perditance G de la ligne.

3° Les pertes *par rayonnement* de la ligne : intervenant au plus haut point dans le cas des lignes de Lecher, elles sont absolument négligeables pour une ligne coaxiale.

Établissons maintenant les relations entre ces pertes et les constantes α, β et u.

En élevant au carré les deux membres de (3) et identifiant, on obtient :

$$\beta^2 - \alpha^2 = LC\omega^2(\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta - 1),$$
$$2\alpha\beta = LC\omega^2(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\delta).$$

Divisons celles-ci membre à membre :

$$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-2}{\operatorname{tg}(\varphi + \delta)},$$

$\frac{\beta}{\alpha}$ est donc racine de l'équation

$$x^2 + \frac{2x}{\operatorname{tg}(\varphi + \delta)} - 1 = 0$$

ou

$$\operatorname{tg}(\varphi + \delta) = \frac{2x}{1 - x^2},$$

égalité qui est satisfaite si

$$x_1 = \operatorname{tg}\frac{\varphi + \delta}{2}.$$

L'autre racine est donc

$$x_2 = -\operatorname{cotg}\frac{\varphi + \delta}{2};$$

elle ne convient pas, car $\frac{\beta}{\alpha}$ est un nombre positif.

Il reste donc :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\varphi + \delta}{2},$$
$$2\alpha\beta = LC\omega^2(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\delta),$$

et finalement

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}, \\ \beta &= \frac{2\pi}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{\varphi + \delta}{2}, \\ u^2 &= \frac{1}{LC}\,\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi + \delta}{2}}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\delta} \end{aligned}} \qquad (4)$$

Ces formules sont valables dans le cas le plus général. L'influence des pertes sur β et u s'y trouve plus clairement en évidence que dans les formules que l'on trouve dans les traités classiques.

Précisons quelques cas particuliers.

Cas des lignes à faibles pertes (φ et δ petits). — On a alors

$$u^2 \sim \frac{1}{LC}\,\frac{2\frac{\varphi + \delta}{2}}{\varphi + \delta}$$

ou

$$u^2 = \frac{1}{LC}$$

indépendante de ω, et, par suite,

$$\beta = \frac{\omega}{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi + \delta}{2}$$

devient

$$\beta = \frac{1}{2} \omega \sqrt{LC} \left(\frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega} \right)$$

ou

$$\beta = \frac{1}{2} \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + G \sqrt{\frac{L}{C}} \right)$$

indépendante de ω.

En résumé :

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= 2\frac{\pi}{\lambda}, \\ \beta &= \frac{\pi\varphi}{\lambda} = \frac{R}{2Z_c} + \frac{GZ_c}{2}, \\ u &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned}} \qquad (5)$$

avec $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (*Cf.* § 3).

Cas des lignes à perditance notable (*φ restant petit*). — Si φ est négligeable devant δ

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\pi}{\lambda}, \\ \beta &= \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{2\pi\chi}{\lambda}, \\ u &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}} \end{aligned}} \qquad (6)$$

3. Impédance itérative. Impédance d'entrée. — On sait qu'on appelle impédance itérative (ou caractéristique)

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}}.$$

Pour une ligne à faibles pertes

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

D'autre part, l'impédance d'entrée d'une ligne court-circuitée est

$$Z = Z_c \operatorname{th} Pl. \qquad (7)$$

4. Surtension d'une ligne. — Par analogie avec les circuits en ondes longues, le rapport $Q = \frac{L\omega}{R}$ peut être appelé coefficient de surtension de la ligne. On voit que, plus les pertes dans le cuivre sont minimes, plus il est grand.

Pour une ligne sans perditance, on a

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi}{\lambda Q},$$

et d'autre part, d'après (5),

$$\beta = \frac{R}{2Z_c},$$

donc

$$Q = \frac{1}{\varphi} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{2Z_c}{R}.$$

Q est donc calculable en fonction de la fréquence, de la résistivité du métal constituant la ligne et des diamètres des cylindres coaxiaux. On démontre que Q est maximum lorsque le rapport du diamètre intérieur du cylindre externe au diamètre extérieur du cylindre interne est sensiblement égal à 3,6 [41] [41 *bis*].

De préférence, on mesurera la valeur exacte de Q comme il sera exposé plus loin.

5. Variations de $|Z|$ en fonction de la longueur de la ligne. — D'après (7) :

$$Z = Z_c \frac{\operatorname{th} \beta l + j \operatorname{tg} \alpha l}{1 + j \operatorname{th} \beta l \operatorname{tg} \alpha l},$$

on peut l'écrire

$$Z = Z_c(R + jX)$$

et poser

$$\theta = \operatorname{th} \beta l, \qquad t = \operatorname{tg} \alpha l,$$

d'où

$$R + jX = \frac{\theta(1 + t^2) + jt(1 - \theta^2)}{1 + t^2\theta^2}.$$

On voit que $\frac{Z}{Z_c}$ est réel si

$$t = 0, \qquad \text{donc} \quad L = K\frac{\lambda}{2},$$

et alors $|Z| = \theta |Z_c|$ (points N_l);

$$t = \infty, \qquad \text{donc} \quad l = (2K + 1)\frac{\lambda}{4}$$

et alors $|Z| = \frac{1}{\theta} |Z_c|$ (points M_l);

$$\theta = 1, \qquad \text{donc} \quad l = \infty$$

et alors $|Z| = |Z_c|$.

D'autre part, $|Z| = |Z_c|$ pour l infini et pour $t^2 = 1$, c'est-à-dire

$$l = (2K + 1)\frac{\lambda}{8} \quad \text{(points } A_l\text{)}.$$

Enfin, il est facile de voir que

$$\theta |Z_c| \leq |Z| \leq \frac{1}{\theta} |Z_c|.$$

La courbe représentant $|Z|$ en fonction de l est donc comprise entre les deux enveloppes E_1 et E_2 et elle a l'allure suivante (*fig.* 3).

La droite horizontale d'ordonnée $|Z| = |Z_c|$

divise la courbe en segments égaux à $\frac{\lambda}{4}$ et elle est la seule à jouir de cette propriété. Il est visible que les minima (ou maxima) de $|Z|$ ne coïncident pas avec les points de contact des courbes E_1 ou E_2.

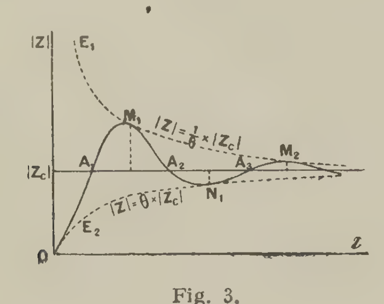


Fig. 3.

Il n'est donc pas évident qu'ils ont lieu pour des longueurs multiples de $\frac{\lambda}{4}$ comme certains auteurs l'ont admis. Nous verrons que ce fait est cependant très sensiblement exact lorsque la perditance est nulle (ligne dans l'air).

6. Application a la mesure de λ, n et χ dans le cas le plus général. — Supposons quelconques les caractéristiques du diélectrique séparant les deux conducteurs de la ligne. On pourra mesurer en fonction de l des quantités proportionnelles à

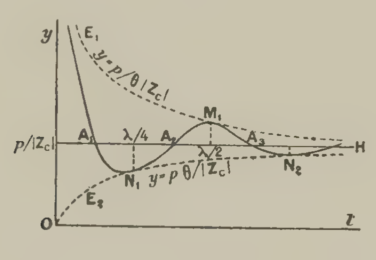


Fig. 4.

l'amplitude du courant dans l'entrée de la ligne, en insérant par exemple un détecteur convenable en série dans cette entrée. Si les indications y de ce détecteur sont proportionnelles à $|i|$, on aura

$$y = \frac{p}{|Z|},$$

p étant une constante. L'allure de la courbe représentant les indications y du détecteur est donc la suivante (*fig.* 4).

Pour avoir λ, on pourra déterminer, sur cette courbe relevée expérimentalement, l'horizontale H qui la partage en segments égaux; la longueur de ceux-ci est égale à $\frac{\lambda}{4}$. Cette détermination pourra se faire très facilement en faisant glisser le long de Oy (O représentant l'origine de la ligne), le côté AB d'un abaque constitué comme l'indique la figure 5; on cherchera le niveau pour lequel il y a coïncidence sur une même horizontale entre les points de la courbe et ceux du faisceau de droites de l'abaque. Ce niveau sera H et l'on aura, en même temps, la valeur de λ.

Une fois ainsi déterminé λ, comment pourra-t-on mesurer n et χ? Il suffira de tracer les médiatrices des segments A_1A_2, A_2A_3, etc. repérés sur H pour obtenir sur la courbe les points M_1, M_2, ... et N_1, N_2, ... Soit Y l'ordonnée d'un point M de rang K $\left(l = K\frac{\lambda}{2}\right)$. On peut répéter toutes ces opérations en supposant la ligne dans l'air. Nous montrerons plus loin comment on peut déterminer cette fois λ_0, Y_0 (correspondant au point de rang K).

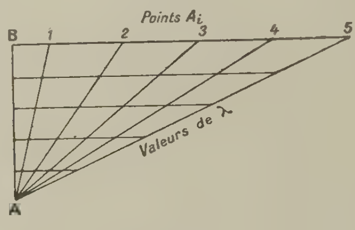


Fig. 5.

Dès lors

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{u_0}{u} = n, \qquad \frac{Y_0}{Y} = \left|\frac{Z_c}{Z_{0c}}\right| \frac{\operatorname{th}\beta K\frac{\lambda}{2}}{\operatorname{th}\beta_0 K\frac{\lambda_0}{2}}$$

d'après les figures représentant y.

Ces formules donnent :

1° Si les pertes sont petites ($\operatorname{tg}\delta \leqq 0,1$),

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = n; \qquad \frac{Y_0}{Y} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{\delta}{\varphi}\right).$$

2° Si les pertes sont notables ($\operatorname{tg}\delta > 0,1$),

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = n, \qquad \frac{Y_0}{Y} = \frac{\cos\frac{\delta}{2}}{n} \frac{\operatorname{th}(K\pi\varphi)}{K\frac{\pi}{2}\varphi},$$

d'où l'on pourra tirer n et χ si l'on sait mesurer φ (*voir* plus loin).

Nous n'avons décrit ce mode opératoire qu'à titre indicatif, car, pour les raisons indiquées dans l'introduction, nous n'avons pas utilisé de ligne complètement remplie par le diélectrique.

7. Ligne coaxiale dans l'air; mesure de λ. — Dans ce cas, $\delta = 0$ et $\beta l = \frac{\pi\varphi l}{\lambda}$ et le rapport de l'ordonnée Y d'un point M à l'ordonnée y_c vaut

$$\frac{Y}{y_c} = \frac{1}{\operatorname{th}\beta L} \sim \frac{2\lambda}{\pi\varphi K\lambda},$$

et si, par exemple, $K \leqq 4$, on a

$$\frac{Y}{y_c} \geqq \frac{1}{2\pi\varphi} > 100,$$

avec les lignes usuelles. L'allure de la courbe représentant y est alors celle de la figure 6.

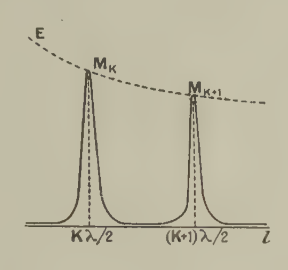


Fig. 6.

La détermination de λ par la recherche de l'horizontale H est alors impraticable. Mais il est évident que, par suite de l'acuité des pointes de résonance de courant (il sera démontré plus loin que leur largeur à mi-hauteur du maximum est de l'ordre de $\frac{2\lambda}{1000}$), il est alors légitime de confondre les points d'abscisse $K\frac{\lambda}{2}$ avec les maxima de y. La distance entre deux maxima donnera donc $\frac{\lambda}{2}$.

Remarquons en passant que la hauteur des maxima est inversement proportionnelle à $\operatorname{th} \beta l$, donc inversement proportionnelle à $K\frac{\lambda}{2}$ et, par suite, à leur rang K.

Nous décrirons ultérieurement la réalisation d'un ondemètre basé sur ces résultats classiques.

8. Ligne coaxiale dans l'air; mesure du coefficient de surtension. — Cherchons maintenant la largeur de la courbe $y = f(l)$ à la hauteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de son maximum. Nous savons que

$$y = \frac{p}{|Z|}, \qquad \text{donc} \quad y^2 = \frac{p^2}{|Z_c|^2} \frac{1 + t^2\theta^2}{t^2 + \theta^2}$$

et que le maximum de y a lieu lorsque $|Z|$ est minimum, donc lorsque $L = K\frac{\lambda}{2}$ ou $t = 0$. La valeur du maximum de y^2 est donc $\frac{p^2}{\theta_M^2 |Z_c|^2}$ avec $\theta_M = \beta L$. y^2 sera réduit à $\frac{1}{2} \frac{p^2}{\theta_M^2 |Z_c|^2}$ pour une valeur t' de t telle que

$$t'^2 = \frac{\theta_M^2}{(1 - 2\theta_M^2 \theta'^2)}.$$

A t' correspond une certaine valeur l' de l.

Admettons provisoirement que θ_M soit très petit et que $\theta' \neq \theta_M$, c'est-à-dire $l' \neq L$; il reste

$$t' = \pm\, \theta_M \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tg} 2\pi \frac{l'}{\lambda} = \pm\, \pi\varphi \frac{L}{\lambda}.$$

Posons $l' = L - d$, il vient :

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{d}{\lambda} = \pm\, \pi\varphi \frac{L}{\lambda}$$

et, avec la même approximation que plus haut :

$$d = \pm\, \varphi \frac{L}{2} = \pm\, \varphi K \frac{\lambda}{4}.$$

La largeur de la courbe est donc au niveau $\frac{1}{\sqrt{2}}$ du maximum du courant

$$2d = K\varphi \frac{\lambda}{2}.$$

Par suite, la surtension Q a pour valeur

$$Q = \frac{1}{\varphi} = \frac{K\frac{\lambda}{2}}{2d}.$$

Nous verrons que, pour les lignes coaxiales que nous avons construites, Q est supérieur à 1 000; par suite, comme K n'est pas supérieur à 4 dans nos mesures, θ_M n'est pas supérieur à $2\pi\varphi$, c'est-à-dire à $2\pi \times 10^{-3}$. Ceci légitime la première hypothèse faite plus haut, la seconde étant justifiée par le fait que

$$2d < 2.10^{-3}\lambda, \qquad \text{donc} \quad l' \neq L.$$

On démontrerait de la même façon qu'en mesurant $2d$ à la hauteur $\frac{1}{n}$ du maximum de y, on trouve :

$$Q = \frac{K\frac{\lambda}{2}}{2d}\sqrt{n^2 - 1}.$$

Dans la pratique, nous utilisons comme détecteur un thermocouple, de sorte que les indications y de l'appareil de mesure sont proportionnelles à $|i|^2$ et non à $|i|$.

Dans ce cas, la formule à employer est :

$$\boxed{Q = \frac{K\frac{\lambda}{2}}{2d}\sqrt{m - 1}} \qquad (8)$$

$2d$ étant la largeur de la courbe $y = f(l)$ à la hauteur $\frac{1}{m}$ du maximum.

Chapitre II.

Abordons maintenant l'étude de la méthode que nous avons élaborée pour mesurer les constantes n et χ d'un diélectrique qu'il est impossible de traiter par la méthode du chapitre précédent, soit parce

que ce diélectrique est solide, soit parce qu'il n'est disponible qu'en faible quantité.

Une ligne coaxiale couplée lâchement à un oscillateur par son extrémité A (cf. *fig.* 1), est baignée cette fois par l'air, mais elle se termine par une portion remplie par le diélectrique et court-circuitée en B. Cette portion de ligne avec diélectrique constitue une impédance Z' sur laquelle se trouve fermée la ligne aérienne. On s'arrangera dans la pratique pour que les deux tronçons de ligne coulissants aient des impédances caractéristiques aussi voisines que possible. Soit Z_c la valeur de cette impédance caractéristique commune.

Nous poserons

$$Z' = Z_c(A + jB).$$

Dans le cas qui nous occupe, A et B sont fonctions de n et de χ.

Nous allons d'abord montrer comment on peut mesurer A et B et nous verrons plus tard comment on pourra passer de là à la connaissance de n et χ.

1. Position du problème. — *Le problème qui nous occupe actuellement est donc la mesure d'une impédance quelconque placée à l'extrémité d'une ligne de longueur variable l dont l'entrée est couplée à un oscillateur.*

Il a déjà été traité maintes fois, mais toujours avec des hypothèses restreignant la généralité des formules obtenues, soit que l'auteur suppose nulles les pertes le long de la ligne, soit qu'il se borne à étudier le cas où $A = 0$, etc. D'autre part, la validité des approximations faites lors de la recherche du maximum de courant a toujours été négligée.

D'après la théorie classique des lignes, l'impédance d'entrée de notre ligne fermée sur Z' est

$$Z = Z_c \frac{Z_c \operatorname{th} P l + Z'}{Z_c + Z' \operatorname{th} P l}$$

avec les notations définies au Chapitre I. Z_c est égal à

$$\sqrt{\frac{L}{C}}\left(1 - j\frac{\varphi}{2}\right).$$

Écrivons Z sous la forme $Z = Z_c(R + jX)$ et remplaçons Z' par $Z_c(A + jB)$ et $\operatorname{th} Pl$ par sa valeur en fonction de $\theta = \operatorname{th} \beta l$ et $t = \operatorname{tg} \alpha l$; il vient :

$$R + jX = \frac{A + \theta(1 - Bt) + j(t + At\theta + B)}{A\theta + 1 - Bt + j(At + t\theta + B\theta)}. \quad (9)$$

2. Ligne idéale a surtension infinie. — Il est facile de montrer d'après (9) que, dans ce cas idéal, on a

$$\left.\begin{aligned} R(1 - Bt) - AtX - A &= 0, \\ X(1 - Bt) + AtR - (t + B) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Éliminons t entre ces équations; il vient

$$R^2 + X^2 - \frac{1 + A^2 + B^2}{A} R + 1 = 0 \quad (11)$$

qui montre que, lorsque l varie, l'affixe de $R + jX$ décrit un cercle appartenant au faisceau admettant $+1$ et -1 comme points de Poncelet. On constate que $\left|\frac{Z}{Z_c}\right|$ est minimum quand $X = 0$ et vaut alors OM (*fig.* 7).

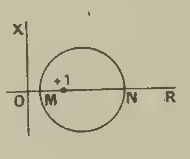


Fig. 7.

Par suite, lorsque le courant d'entrée est maximum, la valeur I de celui-ci et la longueur L de la ligne à ce moment, sont liées à A et B par les relations tirées de (10) et (11) :

$$B \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{L}{\lambda} + (A^2 + B^2 - 1) \operatorname{tg} 2\pi \frac{L}{\lambda} - B = 0,$$

$$A \frac{p^2}{I^2} - (1 + A^2 + B^2)\frac{p}{I} + A = 0,$$

puisque en M

$$X = 0, \qquad R = \left|\frac{Z}{Z_c}\right| = \frac{p}{I},$$

p étant une constante.

De ces deux relations, on pourrait tirer A et B en fonction de L et I à la condition d'éliminer la constante p grâce à un étalonnage préalable avec une impédance connue.

On voit qu'en remplaçant $A + jB$ par un court-circuit, ces relations conduisent à $L = K\frac{\lambda}{2}$ et $I = \infty$. Ce dernier résultat est évidemment dû au fait qu'on a supposé nulles les pertes dans la ligne.

3. Cas d'une ligne réelle. — En partant de (9) on trouve cette fois, après identification,

$$R(A\theta + 1 - Bt) - X(At + t\theta + B\theta) = A + \theta(1 - Bt),$$
$$R(At + t\theta + B\theta) + X(A\theta + 1 - Bt) = t + At\theta + B.$$

Éliminons t :

$$A(R^2 + X^2) - (1 + A^2 + B^2)R + A + \frac{\theta}{1 + \theta^2}$$
$$\times [(1 + A^2 + B^2)(R^2 + X^2) - 4AR + 1 + A^2 + B^2] = 0. \quad (12)$$

Pour chaque valeur de l, l'affixe de $R + jX$ est donc encore sur un cercle appartenant au faisceau admettant $+1$ et -1 comme points de Poncelet. Mais ce cercle change avec l.

Comme pour la ligne idéale, nous allons chercher dans quelles conditions $R + jX$ est réel.

Soient α_1 et α_2 les arguments respectifs du numérateur et du dénominateur de (9). En calculant

$$\frac{X}{R} = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2),$$

on trouve

$$\frac{X}{R}=\frac{(B+t)(1-Bt)-A^2t}{1+t^2}\,\frac{1-\theta^2}{(A+\theta)(1+A\theta)+B^2\theta},\qquad(13)$$

X est donc nul si $\theta = 1$ (l infini) ou encore si

$$Bt^2+(A^2+B^2-1)t-B=0.\qquad(14)$$

C'est la même condition que pour la ligne idéale.

Soient t_1 et t_2 les racines de cette équation; on a $t_2 = -\frac{1}{t_1}$. Les valeurs de L pour lesquelles Z est réel sont donc :

$$L=\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{arctg}t_1+K\frac{\lambda}{2},$$

$$L=\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{arctg}t_2+(2K+1)\frac{\lambda}{4},$$

valeurs espacées entre elles de $\frac{\lambda}{4}$.

D'autre part, quand $X = 0$, $\left|\frac{Z}{Z_c}\right|$ satisfait l'équation

$$R^2-\frac{1+A^2+B^2+2A\,\mathrm{th}\,2\beta L}{A+\frac{1}{2}\mathrm{th}\,2\beta L(1+A^2+B^2)}R+1=0.$$

Posons alors :

$$\left.\begin{aligned}F_1&=\frac{1-\mathrm{tg}^2 2\pi\frac{L}{\lambda}}{\mathrm{tg}\,2\pi\frac{L}{\lambda}}=\frac{2}{\mathrm{tg}\,4\pi\frac{L}{\lambda}},\\ F_2&=2\left(\frac{1+\left|\frac{Z_L}{Z_c}\right|^2}{2\left|\frac{Z_L}{Z_c}\right|}-2\beta L\right):\left(1-2\frac{1+\left|\frac{Z_L}{Z_c}\right|^2}{2\left|\frac{Z_L}{Z_c}\right|}\beta L\right).\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Des équations (14) et (15), on tire respectivement :

$$\boxed{\begin{array}{ll}A^2+B^2-F_1B-1=0 & C_1\\ A^2+B^2-F_2A+1=0 & C_2\end{array}}\qquad(17)$$

4. Construction graphique de l'impédance $A + jB$. — Si nous savons déduire de l'expérience les valeurs de F_1 et de F_2, nous pourrons construire, dans le plan OA, OB, les cercles C_1 et C_2 dont nous venons de trouver les équations. En effet :

1° Le cercle C_1 passe par $+1$ et son centre a pour coordonnées O et $\frac{F_1}{2}$.

2° Le cercle C_2 est orthogonal au cercle trigonométrique (centre O et rayon 1) et son centre a pour coordonnées $\frac{F_2}{2}$ et O.

C_1 et C_2 sont orthogonaux. *Chacun de leurs points d'intersection est donc graphiquement défini avec précision. L'impédance $A + jB$ est représentée par l'un d'eux.*

L'ambiguïté sera facile à lever dans la pratique, car on possède en général des renseignements sur les signes de A ou de B. *Pour avoir Z' il suffira de multiplier A et B par Z_c qui est calculable.*

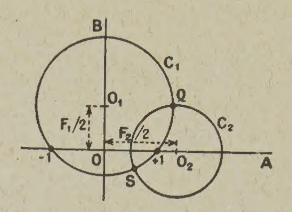


Fig. 8.

Remarquons en passant que l'existence du cercle C_2 entraîne que $|F_2| \geqq 2$.

5. Relations entre l'expérience et les valeurs de F_1 et F_2. — Supposons provisoirement que nous sachions déceler expérimentalement la $K^{\text{ième}}$ valeur L de la longueur de la ligne pour laquelle $\frac{Z}{Z_c}$ est réel. Soit I le courant à l'entrée à ce moment.

Soient L_0 et I_0 les grandeurs correspondantes quand l'impédance à mesurer est remplacée par un court-circuit.

De la mesure de L on déduira

$$\boxed{F_1=2\,\mathrm{cotg}\,4\pi\frac{L}{\lambda}.}\qquad(18)$$

D'autre part, F_2 peut se calculer connaissant L, I, L_0, I_0 et la surtension de la ligne. En effet, nous avons vu, dans le chapitre précédent au sujet de la ligne aérienne en court-circuit, que pour $L_0 = K\frac{\lambda}{2}$ on a

$$\frac{I_0}{I_c}=\frac{2}{K\pi\varphi}.$$

Par suite on peut écrire

$$\left|\frac{Z_L}{Z_c}\right|=\frac{I_c}{I}=\frac{I_c}{I_0}\frac{I_0}{I}=\frac{K\pi\varphi}{2}\frac{I_0}{I},$$

posons alors

$$\mathrm{th}\,b=\frac{K\pi\varphi}{2}\frac{I_0}{I},\qquad \mathrm{th}\,c=2\pi\varphi\frac{L}{\lambda},$$

ce qui est toujours possible, car nous verrons, par la suite, qu'au moment de la mesure

$$\left|\frac{Z_L}{Z_c}\right|\leqq 1\qquad\text{et}\qquad 2\pi\varphi\frac{L}{\lambda}\leqq 4\pi\varphi<12.10^{-3}.$$

Avec ces notations, on a

$$\boxed{F_2=\frac{2}{\mathrm{th}(2b-c)}.}\qquad(19)$$

Nous sommes donc finalement *en mesure de*

déduire F_1 et F_2 et par suite $A + jB$ des données expérimentales relevées au moment où $\frac{Z}{Z_c}$ est réel.

Il nous reste à établir comment on peut arriver à déceler expérimentalement le moment où $\frac{Z}{Z_c}$ est réel.

6. Recherche expérimentale des conditions où $\frac{Z}{Z_c}$ est réel. — Nous avons démontré que, pour une ligne à surtension infinie, $\frac{Z}{Z_c}$ était réel en même temps que $\left|\frac{Z}{Z_c}\right|$ était stationnaire, c'est-à-dire au moment où le courant d'entrée était maximum ou minimum (en fait, on mesure seulement les maxima du courant).

Or, pour nos lignes, φ est très petit. Nous pouvons donc nous demander dans quelle mesure il est encore possible de trouver les points où $\frac{Z}{Z_c}$ est réel, en recherchant les maxima du courant à l'entrée de la ligne. *Nous allons donc étudier dans quelles conditions nous avons encore le droit d'affirmer que, pour une ligne à surtension finie, $\frac{Z}{Z_c}$ est stationnaire quand $\left|\frac{Z}{Z_c}\right|$ est réel.*

Soient ρ et a le module et l'argument de $R + jX$. On tire des équations (12) et (13) et en se servant de (17) pour mettre en évidence F_1 et F_2 :

$$\rho^2 - \frac{1 + \frac{2}{F_2} 2\beta l}{\beta l + \frac{1}{F_2}} \rho \cos a + 1 = 0, \tag{20}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{B}{AF_2} \frac{1}{\beta l + \frac{1}{F_2}} \left(\cos 4\pi \frac{l}{\lambda} - \frac{F_1}{2} \sin 4\pi \frac{l}{\lambda}\right) \tag{21}$$

en négligeant les termes en θ^2 devant l'unité, ce qui est légitime puisque $\theta = \beta l$ sera de l'ordre de 6.10^{-3} au plus dans nos mesures. Comme d'autre part, $|F_2|$ est supérieur ou égal à 2, la première relation peut s'écrire

$$\rho^2 - \frac{1}{\beta l + \frac{1}{F_2}} \rho \cos a + 1 = 0, \tag{22}$$

ρ sera stationnaire si $\frac{d\rho}{da} = 0$, c'est-à-dire si

$$\sin a + \cos a \frac{\beta}{\beta l + \frac{1}{F_2}} \frac{dl}{da} = 0,$$

ou encore si

$$\operatorname{tg} a = - \frac{\beta}{\beta l + \frac{1}{F_2}} \frac{dl}{da}. \tag{23}$$

Or, d'après (21),

$$(1 + \operatorname{tg}^2 a) \frac{da}{dl} = \frac{-B}{AF_2} \frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta l + \frac{1}{F_2}} \left(\sin 4\pi \frac{l}{\lambda} + \frac{F_1}{2} \cos 4\pi \frac{l}{\lambda}\right) + \frac{B}{AF_2} \frac{-\beta}{\left(\beta l + \frac{1}{F_2}\right)^2} \left(\cos 4\pi \frac{l}{\lambda} - \frac{F_1}{2} \sin 4\pi \frac{l}{\lambda}\right);$$

donc, d'après (23) et (21), lorsque ρ est stationnaire (soit alors L' la valeur de l),

$$\left(\frac{da}{dl}\right)_S - \operatorname{tg} a \frac{\beta}{\beta L' + \frac{1}{F_2}} = \frac{-B}{AF_2} \frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta L' + \frac{1}{F_2}} \times \left(\sin 4\pi \frac{L'}{\lambda} + \frac{F_1}{2} \cos 4\pi \frac{L'}{\lambda}\right) - \frac{\beta}{\beta L' + \frac{1}{F_2}} \operatorname{tg} a,$$

d'où

$$\left(\frac{da}{dl}\right)_S = \frac{-B}{AF_2} \frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta L' + \frac{1}{F_2}} \left(\sin 4\pi \frac{L'}{\lambda} + \frac{F_1}{2} \cos 4\pi \frac{L'}{\lambda}\right).$$

Par suite, d'après (23),

$$\operatorname{tg} a_S = \frac{AF_2}{B} \frac{\beta\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sin 4\pi \frac{L'}{\lambda} + \frac{F_1}{2} \cos 4\pi \frac{L'}{\lambda}}, \tag{24}$$

a_S désignant l'argument de $\frac{Z}{Z_c}$ lorsque $\left|\frac{Z}{Z_c}\right|$ est stationnaire.

Dès lors, la valeur L' de l pour laquelle $\left|\frac{Z}{Z_c}\right|$ est stationnaire, s'obtient en égalant les deux valeurs de tg a_S fournies par (21) et (24) :

$$\operatorname{tg} a_S = \frac{B}{AF_2} \frac{1}{\beta L' + \frac{1}{F_2}} \left(\cos 4\pi \frac{L'}{\lambda} - \frac{F_1}{2} \sin 4\pi \frac{L'}{\lambda}\right) = \frac{AF_2}{B} \frac{\beta\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sin 4\pi \frac{L'}{\lambda} + \frac{F_1}{2} \cos 4\pi \frac{L'}{\lambda}}.$$

Cette égalité fournit, en posant

$$T' = \operatorname{tg} 4\pi \frac{L'}{\lambda} \quad \text{et} \quad P = \frac{A^2 F_2^2}{B^2} \frac{\beta\lambda}{4\pi} \left(\beta L' + \frac{1}{F_2}\right)$$

et, en se rappelant que

$$\frac{2}{F_1} = \operatorname{tg} 4\pi \frac{L}{\lambda} = T,$$

la relation suivante :

$$\frac{(T - T')(1 + TT')}{1 + T'^2} = PT^2. \tag{25}$$

Telle est l'équation qui relie la valeur L' correspondant à $\left|\frac{Z}{Z_c}\right|$ stationnaire à la valeur L pour laquelle $\frac{Z}{Z_c}$ est réel

Nous voici donc en mesure d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes dans lesquelles on a le droit d'admettre que $\frac{Z}{Z_c}$ est réel au moment où le courant est maximum.

Première condition. — $L' - L$ doit être inférieur ou égal à la plus petite variation dl de longueur mesurable expérimentalement.

Deuxième condition. — La valeur du minimum de ρ doit être la même que celle obtenue pour $a = 0$. Ceci sera très sensiblement vérifié si $|\operatorname{tg} a_S| \leq 0{,}01$ car, l'équation (22) se réduit alors à

$$\rho^2 - \frac{1}{\beta L' + \frac{1}{F_2}}\rho + 1 = 0,$$

tandis que pour $a = 0$, on a

$$\rho^2 - \frac{1}{\beta L + \frac{1}{F_2}}\rho + 1 = 0$$

qui est la même que la précédente si L et L' sont suffisamment voisins.

Examinons successivement ces deux points :

1° Nous allons d'abord montrer que, quelle que puisse être la valeur prise par L' au moment du maximum de courant, la valeur absolue de $\operatorname{tg} a_S$ est bornée supérieurement par un nombre aussi petit qu'on le veut, pourvu que $A + jB$ soit dans une certaine région du plan complexe.

En effet, d'après (24),

$$\operatorname{tg} a_S = S\frac{T\sqrt{1+T'^2}}{1+TT'}$$

en posant

$$\frac{AF_2}{B}\frac{\beta\lambda}{4\pi} = S;$$

d'autre part,

$$\operatorname{tg} 4\pi\frac{L'-L}{\lambda} = \frac{T'-T}{1+TT'}.$$

On en déduit, en se servant de (25), la relation importante

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 a_S = S^2\frac{T^2(1+T'^2)}{(1+TT')^2} = -\frac{S^2}{P}\operatorname{tg} 4\pi\frac{L'-L}{\lambda}.} \qquad (26)$$

Par conséquent, $\operatorname{tg}^2 a_S$ s'annule seulement si $T' = T$, donc, d'après (25), si $T' = T = 0$. Pour T' infini, T prend la valeur finie $T = -\frac{1}{P_\infty}$ (²), donc $\operatorname{tg}^2 a_S$ possède une asymptote d'ordonnée S^2.

D'autre part, on trouve que

$$\frac{d\operatorname{tg}^2 a_S}{dT'} = -\frac{S^2}{P}\left[\frac{1+(1+S^2)T^2-(1+T'^2)\frac{dT}{dT'}}{(1+TT')^2}\right].$$

Cette dérivée s'annule si

$$1+(1+S^2)T^2-(1+T'^2)\frac{dT}{dT'} = 0 \qquad (27)$$

ainsi que pour $T' = \infty$, car alors $\frac{dT}{dT'} = 0$ (³).

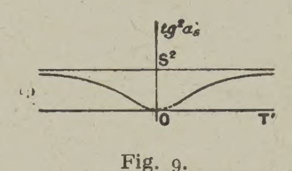


Fig. 9.

Si nous choisissons $S \leqq \eta \leqq 10^{-2}$, l'équation (27) ne peut être vérifiée que pour des valeurs de T et T' très voisines, et par suite, pour $T' \neq 0$ [d'après la relation (25)]. Or, si $T' \neq 0$, $\operatorname{tg}^2 a_S$ vaut très sensiblement $S^2 T'^2$, donc est beaucoup plus petit que S^2; par suite, la courbe représentant $\operatorname{tg}^2 a_S$ en fonction de T' est certainement à ce moment-là en dessous de son asymptote. L'allure de cette courbe est donc nécessairement celle donnée par la figure 9.

Nous voyons donc que, si $S \leqq \eta \leqq 10^{-2}$, nous pouvons affirmer que l'on a

$$|\operatorname{tg} a_S| \leqq \eta \leqq 10^{-2}$$

et que, par suite, la deuxième condition posée plus haut est satisfaite.

(²) Comme il est légitime de s'attendre à ce que $L' - L$ et a_S soient très petits, on peut décider quelle valeur de T' tirée de (25), il faut faire correspondre à une valeur de T donnée ou réciproquement. Ainsi, déduisons-nous de (25) que, pour $T' = 0$, T est également nul et que pour T' infini, T prend la valeur $-1/P_\infty$, P_∞ désignant la grandeur finie de P pour une valeur de L' qui rend T' infini.

(³) D'après (25), la dérivée $\frac{dT}{dT'}$ s'écrit :

$$\frac{dT}{dT'} = \frac{T^2\frac{dP}{dL'}}{-T'^2(1+2PT)+2TT'-2PT+1+\frac{(1+TT')^2}{(1+T'^2)D}-\frac{(T-T')^2}{(1+T'^2)D}}$$

avec

$$D = -T'^2(1+2PT)+2TT'-2PT+1.$$

Lorsque T' devient infini, $\frac{dP}{dL'}$ reste fini, T tend vers $-\frac{1}{P_\infty}$, et enfin $1 + 2PT$ tend vers -1; donc, $\frac{dT}{dT'}$ tend vers zéro.

2° D'autre part, on a, d'après (26),

$$\left| \operatorname{tg} 4\pi \frac{L'-L}{\lambda} \right| = \frac{|P|}{S^2} \operatorname{tg}^2 as \leqq |P|.$$

Cette inégalité peut s'écrire, en remplaçant P par sa valeur et en remarquant que, dans les mesures, on a $L' \leqq 2\lambda$ et que φ est de l'ordre de 10^{-3},

$$\operatorname{tg} 4\pi \frac{L'-L}{\lambda} \Big| \leqq 4\pi S^2 \left(\frac{L'}{\lambda} + \frac{1}{\pi\varphi F_2} \right) < \eta^2 \left(8\pi + \frac{4.10^3}{F_2} \right).$$

Si l'on choisit η suffisamment petit, on pourra en déduire

$$\frac{L'-L}{\lambda} < \eta^2 \left(2 + \frac{10^3}{\pi F_2} \right).$$

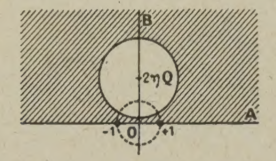


Fig. 10.

On voit donc que la première condition posée plus haut sera à son tour satisfaite si l'on choisit η suffisamment petit pour que $\eta^2 \left(2 + \frac{10^3}{\pi F_2} \right) \times \lambda$ soit inférieur à la plus petite variation de longueur décelable expérimentalement.

Finalement, nous pouvons conclure, d'après cette discussion, que nous aurons le droit d'appliquer les formules (18), (19) et (17) aux résonances de courant, à la condition de choisir $S \leqq \eta \leqq 0{,}01$, η étant un nombre assez petit pour que $\eta^2 \left(2 + \frac{10^3}{\pi F_2} \right)$ ait une valeur compatible avec la précision des mesures de longueur.

L'inégalité $S \leqq \eta$ s'écrit :

$$\frac{AF_2}{B} \frac{\beta\lambda}{4\pi} \leqq \eta \quad \text{ou} \quad \frac{A^2 + B^2 + 1}{B} \leqq 4\eta Q,$$

où Q est la surtension de la ligne. L'affixe de $A + jB$ doit donc être en dehors de la zone hachurée sur la figure 10 ou bien sur le cercle qui en est une des limites. La grandeur du cercle limite dépend des cas d'espèce. A titre d'exemple, prenons le cas où F_2 est infini; on peut alors choisir $\eta = 10^{-2}$ puisque la précision des mesures de longueur ne dépasse pas $2 \times 10^{-4}\lambda$. Le centre du cercle a alors pour ordonnée $\frac{2Q}{100}$, soit environ 20.

7. Résumé du processus de la mesure d'une impédance quelconque. — En définitive, les différentes phases d'une mesure sont les suivantes :

1° L'impédance inconnue étant court-circuitée, on cherche le $K^{\text{ième}}$ maximum de courant; on note I_0 grandeur du courant dans l'entrée et l'on repère la longueur de la ligne.

2° On branche l'impédance inconnue à l'extrémité de la ligne. Pour retrouver la $K^{\text{ième}}$ résonance, il faut modifier la longueur de la ligne d'une quantité M et l'on aura $L = L_0 - M$ avec $L_0 = K\frac{\lambda}{2}$. On note, de plus, l'intensité I du courant à la résonance.

3° On calcule F_1 et F_2 par les formules (18) et (19).

4° On construit graphiquement $A + jB$ (*cf.* § 4).

5° L'impédance inconnue est alors $Z_c \times (A + jB)$, Z_c étant l'impédance caractéristique calculable de la ligne. Le résultat obtenu sera valable si $A + jB$ appartient au domaine délimité au paragraphe précédent (s'il n'en était pas ainsi, on pourrait, théoriquement, recommencer la mesure avec une ligne de Z_c convenablement choisi).

Il ne nous reste plus qu'à appliquer ces résultats à la recherche des constantes n et χ d'un diélectrique quelconque, en constituant l'impédance $A + jB$ par des éléments dépendant de n et de χ.

(*A suivre.*)

Le Gérant : Maurice Blondin. 120344 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1944.